



BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM



Bevezetés az algebra 2

BMETE91AM37



Mátrixfüggvények

H607 – 2017-04-05



Wetttl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Diagonalizálható mátrixok függvényei

- m Ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ és $\mathbf{D}$ diagonális, továbbá $\mathbf{D}$ főátlóbeli elemei benne vannak a hatványsor konvergenciatartományában, akkor

$$f(\mathbf{D}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{D}^k = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k d_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_n^k \right) = \text{diag}(f(d_1), \dots, f(d_n))$$

Eszerint például bármely diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrixra értelmezhető az $e^{\mathbf{A}}$ hatvány, nevezetesen

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \dots$$

Hasonlóképp definiálható az $\ln(\mathbf{I} + \mathbf{A})$ mátrixfüggvény is. Fölhasználva a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad |x| < 1$$

hatványsort kapjuk, hogy

$$\ln(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^3}{3} - \frac{\mathbf{A}^4}{4} + \dots,$$

ahol $\varrho(\mathbf{A}) < 1$.

- m Egy hatványsorba fejthető függvénynek egy diagonális mátrixban – és így bármely diagonalizálható mátrixban – fölvelt értékét a függvénynek csak a sajátértékekben való viselkedése befolyásolja.
- m A Cayley–Hamilton-tétel szerint minden mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét, így egy n -edrendű mátrix minden hatványa legföljebb $n - 1$ -edik hatványok lineáris kombinációjával helyettesíthető, azaz a függvény értéke egy polinomba való helyettesítéssel is kiszámolható.
- Á Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$ és $p \in \mathbb{C}[x]$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} p(\mathbf{J}_1) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & p(\mathbf{J}_2) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & p(\mathbf{J}_k) \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1},$$

m Tegyük fel, hogy az f függvény λ körül Taylor-sorba fejthető, azaz

$$f(x) = f(\lambda) + f'(\lambda)(x - \lambda) + \dots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(x - \lambda)^m + \dots$$

és legyen $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ egy Jordan-blokk, azaz

$$\mathbf{J} = \lambda \mathbf{I} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

- Mivel $\mathbf{N}^n = \mathbf{O}$, fenn kell álljon az

$$f(\mathbf{J}) = f(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{N}) = f(\lambda) \mathbf{I} + f'(\lambda) \mathbf{N} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \mathbf{N}^{n-1} \quad (1)$$

összefüggés – ha egyáltalán van értelme az $f(\mathbf{J})$ kifejezésnek.
Tehát az f függvénynek csak a Jordan-mátrix rendjénél kisebb rendű deriváltjai játszanak szerepet a függvényértékben.

Mátrixfüggvény a Jordan-alakból

Spektrumon definiált függvény

- D Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix spektruma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, a λ_i sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelölje m_i . Azt mondjuk, hogy f definiálva van az $\mathbf{A}$ spektrumán, ha az

$$f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

értékek léteznek. Azt mondjuk, hogy ezek az értékek az f értékei az $\mathbf{A}$ spektrumán.

- m Minden függvény, mely $\mathbf{C}$ minden pontjában akárhányszor differenciálható, tetszőleges mátrixra értelmezve van annak spektrumán. Így minden polinom értelmezve van minden mátrix spektrumán, ami összhangban lesz azzal, hogy minden négyzetes mátrixnak bármely polinomfüggvénye értelmezve van.
- m Ha μ az $\mathbf{A}$ mátrix minimálpolinomja, akkor μ értelmezve van $\mathbf{A}$ spektrumán, és μ értékei $\mathbf{A}$ spektrumán mind nullák. Ez egyből következik a minimálpolinom előállításából és a fenti definícióból.

Mátrixfüggvény a Jordan-alakból

D Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Jordan-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$, ahol $\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_k)$ a Jordan-féle normálalakja, és n_i jelöli a $\mathbf{J}_i$ blokk rendjét. Ekkor

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{C}f(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C} \text{diag}(f(\mathbf{J}_1), \dots, f(\mathbf{J}_k))\mathbf{C}^{-1},$$

ahol

$$f(\mathbf{J}_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \dots & \dots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix} \quad (2)$$

- Egyszerű képletbehelyettesítéssel $f(x) = x^3$ esetén

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} f(2) & f'(2) \\ 0 & f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

- Az $f(x) = e^x$ függvény esetén, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ akkor } e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & \frac{e^2}{2} \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} = e^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Általában a λ -hoz tartozó Jordan-blokkra

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \text{ esetén } e^{\mathbf{J}} = e^{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Mátrix exponenciális függvénye

P Legyen

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az e^A mátrixot!

M A karakterisztikus polinomja $x^3 + 10x^2 + 32x + 32 = (x + 2)(x + 4)^2$,

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^A = P e^J P^{-1} = \frac{1}{2e^4} \begin{bmatrix} e^2 + 1 & 2e^2 - 2 & e^2 - 1 \\ e^2 - 1 & 2e^2 & e^2 - 1 \\ 1 - e^2 & 2 - 2e^2 & 3 - e^2 \end{bmatrix}$$

P Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ mátrix Jordan-féle normálalakját, $\mathbf{J}$ -t, és az $\mathbf{A}^{100}$, $e^{\mathbf{J}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ mátrixokat.

M $\chi(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 5)$. A 2-höz tartozó s.v.: $(1, 0, 0)$, a -5 -höz tartozó $(-9/7, 0, 1) \rightsquigarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

A 2-höz tartozó másik általánosított sajátvektor:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1, \text{ azaz } \begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ennek egy megoldása $\mathbf{x}_2 = (0, \frac{1}{3}, 0) \rightsquigarrow$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9/7 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9/7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Mivel $(x^{100})' = 100x^{99}$, $(e^x)' = e^x$, $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, ezért

$$J^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 2^{99} & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix}, \quad e^J = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5} \end{bmatrix},$$

$$e^{3J} = \begin{bmatrix} e^6 & 3e^6 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

Innen az $A^{100} = CJ^{100}C^{-1}$ és $e^{3A} = Ce^{3J}C^{-1}$ felhasználásával

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 3 \cdot 2^{99} & \frac{9}{7}(2^{100} - 5^{100}) \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix},$$

$$e^{3A} = \begin{bmatrix} e^6 & 9e^6 & \frac{9}{7}(e^6 - e^{-15}) \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

Mátrixfüggvény Hermite-polinommal

Spektrumon azonos értékeket adó polinomok

- Á** Tetszőleges p és q polinomokra és $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixra $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$, pontosan akkor teljesül, ha p és q értékei $\mathbf{A}$ spektrumán azonosak.
- B** Ha $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$, akkor $h = p - q$ annullálja $\mathbf{A}$ -t, így h osztható a minimálpolinommal, így a minimálpolinommal együtt h értékei is nullák az $\mathbf{A}$ spektrumán.

Ha p és q értékei $\mathbf{A}$ spektrumán azonosak, akkor a $h = p - q$ polinom értékei mind nullák. Az ilyen polinomok alakja $\prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{m_i} g(x)$, azaz $h = \mu g$, tehát h annullálja $\mathbf{A}$ -t, így $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$.

Mátrixfüggvény kiszámítása polinominterpolációval

- D Legyen $\mathbf{A}$ minimálpolinomja $\mu_{\mathbf{A}}$, és tegyük fel, hogy az f függvény definiálva van $\mathbf{A}$ spektrumán. Ekkor $f(\mathbf{A}) := p(\mathbf{A})$, ahol p az a polinom, melynek foka kisebb $\mu_{\mathbf{A}}$ fokánál, és amely eleget tesz a

$$p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k \quad (3)$$

feltételeknek, ahol m_i a λ_i sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelöli.

- m A definícióban megadott polinom egyértelműen létezik, ezt nevezzük **Hermite-polinomnak**, mely explicit módon is megadható:

$$p(x) = \sum_{i=1}^s \left(\left(\sum_{j=0}^{m_i-1} \left(\frac{f(y)}{\prod_{k \neq i} (y - \lambda_k)} \right)^{(j)} (\lambda_i) \frac{(x - \lambda_i)^j}{j!} \right) \prod_{j \neq i} (x - \lambda_j)^{m_j} \right).$$

- m Ha **A**-nak minden sajátértéke egyszeres algebrai multiplicitású, azaz $s = n$ és $m_i = 1$ minden i -re, akkor az előző formula az ismert Lagrange-féle interpolációs polinomot adja:

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \left(f(\lambda_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right). \quad (4)$$

Ha **A**-nak egyetlen s.ért. λ , melynek n az algebrai multiplicitása, azaz $s = 1$, $m_1 = n$, akkor f Taylor-polinomját kapjuk:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(\lambda) \frac{(x - \lambda)^j}{j!}.$$

- T** Adott $\mathbf{A}$ mátrixhoz a fenti definícióban definiált ($\mu_{\mathbf{A}}$ -nál kisebb fokú, a 3 feltételeket kielégítő) Hermite-polinom **létezik és egyértelmű**.
- B** Ha λ_i indexe (azaz a hozzá tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendje) m_i , akkor a keresett polinom ismeretlen együtthatóinak száma $= \deg \mu_{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^s m_i$
- másrészt az egyenletek száma is $= \sum_{i=1}^s m_i$
 - $\deg \mu_{\mathbf{A}}$ -ismeretlenes és ugyanennyi egyenletből álló egyenletrendszer egyértelműen megoldható a jobb oldal bármely értékeire $\iff$ a homogén egyértelműen megoldható $\iff$ a triviális az egyetlen megoldása.
 - A homogén egyenletrendszer megoldása egyértelmű, mert $\mu_{\mathbf{A}}$ -nál kisebb fokú polinomok közt csak a zéruspolinom lehet megoldás, mivel csak az annullálja $\mathbf{A}$ -t.

- m** Az Hermite-polinom ugyan egyértelmű, de nem mindig tudjuk könnyen meghatározni, például ha a mátrixnak csak a sajátértékeit ismerjük, de a legnagyobb Jordan-blokk méretét nem. A korábbiak szerint bármely más polinom is megfelel, mely kielégíti a (3) feltételeket.
- P** Nézzük az $f(x) = x^3$ függvény helyettesítési értékét a $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixban. Ugyan f polinom, de mivel $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - 2)^2$, azaz a minimálpolinom kisebb fokú, ezért van olyan elsőfokú polinom is, mely $\mathbf{A}$ -ban azonos értéket ad. E polinom az $x^3 : \mu_{\mathbf{A}}(x)$ osztás maradéka. Mivel $x^3 = (x - 2)^2(x + 4) + (12x - 16)$, azaz a maradék $12x - 16$, ezért

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = 12 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 16 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

P Keressük az $f(x) = x^3$ fv. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixhoz tartozó Hermite-féle interpolációs polinomját: $p(x) = ax + b$,

$$\begin{aligned} f(2) = 8 = p(2) &= 2a + b \\ f'(2) = 12 = p'(2) &= a. \end{aligned} \rightsquigarrow a = 12, b = -16.$$

P $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $e^{\mathbf{A}} = ?$

M $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - 2)^3 \rightsquigarrow$ Hermite-polinom: $p(x) = ax^2 + bx + c$

$$e^x|_2 = e^2 = p(2) = 4a + 2b + c$$

$$(e^x)'|_2 = e^2 = p'(2) = 4a + b \rightsquigarrow a = e^2/2, b = -e^2, c = e^2 \rightsquigarrow$$

$$(e^x)''|_2 = e^2 = p''(2) = 2a.$$

$$e^{\mathbf{A}} = p(\mathbf{A}) = \frac{e^2}{2} \mathbf{A}^2 - e^2 \mathbf{A} + e^2 \mathbf{I}$$

$$= \frac{e^2}{2} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - e^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + e^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = e^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exponenciális függvény Hermite-polinommal

P Számítsuk ki az e^A mátrixot ha

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

M $\chi_A(x) = (x+2)(x+4)^2$, Jordan-alakja $\text{diag}(-2, -4, -4)$, a minimálpolinom $\mu_A(x) = (x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$.
olyan elsőfokú $p(x) = ax + b$ alakú polinomot keresünk, melyre

$$e^{-2} = p(-2) = -2a + b$$

$$e^{-4} = p(-4) = -4a + b.$$

Innen $a = \frac{1}{2}(e^{-2} - e^{-4})$, $b = 2e^{-2} - e^{-4}$, így

$$e^A = aA + bI = \frac{1}{2e^4} \begin{bmatrix} e^2 + 1 & 2e^2 - 2 & e^2 - 1 \\ e^2 - 1 & 2e^2 & e^2 - 1 \\ 1 - e^2 & 2 - 2e^2 & 3 - e^2 \end{bmatrix}.$$

P $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}, e^A = ?$

M $\chi(x) = (4 - x)^3, \mu(x) = (4 - x)^2$ (korábbi feladatból)

Keresünk egy $p(x) = ax + b$ polinomot, melyre

$$\begin{aligned} \exp(4) &= e^4 = p(4) = 4a + b \\ \exp'(4) &= e^4 = p'(4) = a \end{aligned} \rightsquigarrow a = e^4, b = -3e^4$$

- Tehát

$$e^A = e^4 A - 3e^4 I = e^4 \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & -4 \\ 4 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

A definíciók ekvivalenciája

- T** A mátrixfüggvény kiszámítására adott fenti két definíció ekvivalens.
- B** A „Hermite”-definíció szerint $f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A})$ és bármely más polinom is megadja $f(\mathbf{A})$ -t, ha kielégíti a (3) feltételeket.
- Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{J}$, akkor $f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}) = p(\mathbf{CJC}^{-1}) = \mathbf{C}p(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1}$, ezért elég a Jordan-alakokra ellenőrizni az ekvivalenciát.
- A „Jordan”-definícióban f -nek épp azok a deriváltjai szerepelnek azokban a sajátértékekben kiértékelve, amelyek a (3) feltételekben is szerepelnek. Így elég csak azt ellenőrizni, hogy egy Jordan-blokk Hermite-polinomja megegyezik-e a „Jordan”-definícióban szereplővel. Ezt a polinom Taylor-polinomjára fölírt (1) képlet igazolja.

Mátrixhatványok konvergenciája

O-hoz konvergálás

T Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ máatrixra $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ pontosan akkor teljesül, ha $\rho(\mathbf{A}) < 1$.

B $(\Rightarrow) \mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1} \rightsquigarrow \mathbf{A}^k = \mathbf{CJ}^k\mathbf{C}^{-1}$

Egy $m \times m$ -es Jordan-blokkra

$$\mathbf{J}_{\lambda}^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \dots & \binom{k}{m-1}\lambda^{k-m+1} \\ 0 & \lambda^k & \dots & \binom{k}{m-2}\lambda^{k-m+2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^k \end{bmatrix}$$

- így $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{J}^k = \mathbf{O}$ esetén $\lambda^k \rightarrow 0 \rightsquigarrow |\lambda| < 1$.
- $(\Leftarrow) |\lambda| < 1$ esetén

$$\left| \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \right| \leq \frac{k^i |\lambda|^{k-i}}{i!} \rightarrow 0$$

- T Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixra $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k$ pontosan akkor konvergens, ha $\rho(\mathbf{A}) < 1$, és ez esetben $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$
- B $(\Rightarrow)$ $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k$ konvergens $\rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{J}_{\lambda}^k$ konvergens minden Jordan-blokkra $\rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k$ konvergens $\rightsquigarrow |\lambda| < 1$.
- $(\Leftarrow)$ $\rho(\mathbf{A}) < 1 \rightsquigarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{O} \rightsquigarrow$
 $(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{k-1}) = \mathbf{I} - \mathbf{A}^k \rightarrow \mathbf{I} \rightsquigarrow$
 $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{k-1} + \dots$ konvergens és $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

Konvergens mátrixhatványok

T Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixra $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k$ pontosan akkor konvergens, ha

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{A}) < 1 & \text{vagy, ha} \\ \rho(\mathbf{A}) = 1 & \text{ahol } \lambda = 1 \text{ az egyetlen sajátérték a spektrálkörön,} \\ & \text{és a } \lambda = 1 \text{ geometriai és algebrai multiplicitása azonos.} \end{cases}$$

Konvergenzia esetén $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{P}_1$, az $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ -re az $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \mathbf{I})$

mentén való vetítés mátrixa (az 1-hez tartozó spektrálvetítő).

B Ha $\rho(\mathbf{A}) > 1$ a hatványok divergálnak, ha $\rho(\mathbf{A}) < 1$, $\mathbf{O}$ -hoz konvergálnak. Marad az $\rho(\mathbf{A}) = 1$ eset.

- Ha a spektrálkörön van 1-től különböző sajátérték, akkor a hozzá tartozó Jordan-blokk hatványainak főátlóiban az $e^{ki\varphi}$ hatványok végtelen osszcilláló sorozatot adnak, ami miatt $\mathbf{A}^k$ is divergens marad.

- Ha $\lambda = 1$ -hez tartozik egy $m > 1$ rendű Jordan-blokk, akkor annak hatványai divergensek:

$$\begin{bmatrix} 1 & \binom{k}{1} & \cdots & \binom{k}{m-1} \\ 0 & 1 & \cdots & \binom{k}{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Marad az az eset, hogy az 1-hez tartozó minden Jordan-blokk 1×1 -es ($I^k \rightarrow I$, tehát konvergens).
- Ekkor, ha az 1 multiplicitása s , akkor

$$\begin{aligned} A^k &= C J^k C^{-1} = C \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & B^k \end{bmatrix} C^{-1} = [X_1 | X_2] \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & B^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^T \\ Y_2^T \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} [X_1 | X_2] \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^T \\ Y_2^T \end{bmatrix} = X_1 Y_1^T = P_1 \end{aligned}$$