BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Bevezetés az algebrába 2

BMETE91AM37

Jordan-féle normálalak

H607 – 2017-04-05

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Mátrixok polinomjai

Mátrixok polinomjai = mátrixpolinomok

Á L! $p \in \mathbb{F}[x]$, $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\mathsf{A} \sim \mathsf{B} \Rightarrow p(\mathsf{A}) \sim p(\mathsf{B})$.

B $\mathsf{B} = \mathsf{C}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{C} \rightsquigarrow \mathsf{B}^k = (\mathsf{C}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{C})(\mathsf{C}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{C})\dots(\mathsf{C}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{C}) = \mathsf{C}^{-1}\mathsf{A}^k\mathsf{C} \rightsquigarrow$

$$p(\mathsf{B}) = \sum_{k=1}^{n} p_k\mathsf{B}^k = \sum_{k=1}^{n} p_k\mathsf{C}^{-1}\mathsf{A}^k\mathsf{C} = \mathsf{C}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\mathsf{A}^k\right)\mathsf{C} = \mathsf{C}^{-1}p(\mathsf{A})\mathsf{C}.$$

K Ha A diagonalizálható, azaz $\mathsf{C}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{C} = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$,

akkor $\mathsf{A} = \mathsf{C}\Lambda\mathsf{C}^{-1}$, $\mathsf{A}^k = \mathsf{C}\Lambda^k\mathsf{C}^{-1} = \mathsf{C}\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)\mathsf{C}^{-1} \rightsquigarrow$

$$p(\mathsf{A}) = \mathsf{C}p(\Lambda)\mathsf{C}^{-1} = \mathsf{C}\begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{bmatrix}\mathsf{C}^{-1},$$

K Ha $\mathbf{A}$ diagonalizálható, a spektruma $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, akkor a spektrálfelbontásból $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{P}_i \rightsquigarrow p(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{m} p(\lambda_i)\mathbf{P}_i$

Á $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}\ \exists 0 \neq p \in \mathbb{F}[x]$: $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

B $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots \mathbf{A}^{n^2} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\dim \mathbb{F}^{n\times n} = n^2$, ezért lineárisan összefüggők $\rightsquigarrow$ valamely lineáris kombinációjuk $\mathbf{O}$:

$$c_{n^2}\mathbf{A}^{n^2} + \ldots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I} = p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}.$$

Á Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ diagonalizálható és $p(x) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - x)$, akkor $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

B A λ sajátértékre $p(\lambda) = 0$, így

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= \mathbf{C}\, p(\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n))\, \mathbf{C}^{-1} \\ &= \mathbf{C}\, \operatorname{diag}(p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n))\, \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{O}. \end{aligned}$$

K Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ diagonalizálható, akkor $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

B $p \mid \chi_{\mathbf{A}} \rightsquigarrow \chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

Polinommátrixok = mátrixegyütthatós polinomok

Á Az $\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{F}[x]^{n\times n}$ polinommátrix felbontható $\mathbf{A}_n x^n + \mathbf{A}_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \mathbf{A}_1 x + \mathbf{A}_0$ alakba.
azaz $\mathbb{F}[x]^{n\times n} = \mathbb{F}^{n\times n}[x]$

m A mátrixszorzás nem kommutatív, így ez egy nem kommutatív gyűrű fölötti polinomgyűrű. (Úgy tekintjük, hogy x fölcserélhető a gyűrű elemeivel, így e polinomok szorozhatók és kanonikus alakra hozhatók).

P $\begin{bmatrix} x^2 & x+1 \\ x^2-1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Cayley–Hamilton-tétel

T Ha $\mathbf{A}$ egy tetszőleges négyzetes mátrix, melynek karakterisztikus polinomja $\chi_{\mathbf{A}}$, akkor $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

B L! $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$. Az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja így $\det \mathbf{B} = \chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + p_1\lambda + p_0$.
$\mathbf{B}$ bármely eleméhez tartozó előjeles aldetermináns λ egy legföljebb $n-1$-edfokú polinomja, így léteznek olyan konstans elemű $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$,..., $\mathbf{C}_{n-1}$ mátrixok, hogy

$$\operatorname{adj} \mathbf{B} = \lambda^{n-1}\mathbf{C}_{n-1} + \ldots + \lambda\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0.$$

$\det(\mathbf{B})\mathbf{I} = \mathbf{B}\operatorname{adj}(\mathbf{B}) \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\operatorname{adj}\mathbf{B} &= (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k\mathbf{C}_k\right)\\ &= \mathbf{A}\mathbf{C}_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^k(\mathbf{A}\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{k-1})\right) - \lambda^n\mathbf{C}_{n-1}.\end{aligned}$$

Együtthatóösszahasonlítás:

$$\begin{array}{rcll}
\det(\mathbf{B})\mathbf{I} & & \mathbf{B}\operatorname{adj}\mathbf{B} & \\
\hline
(-1)^n\mathbf{I} &=& -\mathbf{C}_{n-1} & \cdot\,\mathbf{A}^n \\
p_{n-1}\mathbf{I} &=& \mathbf{A}\mathbf{C}_{n-1} - \mathbf{C}_{n-2} & \cdot\,\mathbf{A}^{n-1} \\
\vdots & & & \vdots \\
p_2\mathbf{I} &=& \mathbf{A}\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1 & \cdot\,\mathbf{A}^2 \\
p_1\mathbf{I} &=& \mathbf{A}\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0 & \cdot\,\mathbf{A} \\
p_0\mathbf{I} &=& \mathbf{A}\mathbf{C}_0. &
\end{array}$$

A beszorzás után kapott egyenlőségeket összeadva

$$(-1)^n\mathbf{A}^n + p_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + p_1\mathbf{A} + p_0\mathbf{I} = \mathbf{O}.$$

K $\forall$ invertálható $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrixhoz $\exists q \in \mathbb{F}[x]_n$ (legf. $n-1$-edfokú): $\mathbf{A}^{-1} = q(\mathbf{A})$.

Minimálpolinom

D L! $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Minimálpolinomnak nevezünk egy olyan minimális fokszámú $\mu_{\mathbf{A}}$ főpolinomot (1 főegyütthatójú), melyre $\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

D Azt mondjuk, hogy a p polinom az $\mathbf{A}$ mátrix annullátora, vagy hogy annullálja azt, ha $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. A minimálpolinom tehát egy legkisebb fokú annullátor főpolinom.

m A nullpolinom nem lehet minimálpolinom, mert nem 1 a főegyütthatója. Az 1 nem lehet minimálpolinom, mert bármely mátrix behelyettesítése után $\mathbf{I}$ lesz (nem $\mathbf{O}$).

m Az egységmátrixra $\mu(x) = x - 1$.

m $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \mu_{\mathbf{A}} = \mu_{\mathbf{B}}$ (ugyanis $p(\mathbf{B}) = \mathbf{C}^{-1}p(\mathbf{A})\mathbf{C}$, így minden p polinomra $p(\mathbf{A})$ és $p(\mathbf{B})$ egyszerre $\mathbf{O}$, illetve egyszerre nem.)

D (A minimálpolinom invariáns a mátrixok hasonlóságára, így) egy véges dimenziós $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortéren értelmezett $L : \mathcal{V}_{\mathbb{F}} \to \mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ lineáris transzformáció minimálpolinomján azt a minimális fokszámú μ_L főpolinomot értjük, melyre $\mu_L(L) = O$.

m $\mu_L =$ bármely bázisban fölírt $\mathbf{M}$ mátrixának $\mu_{\mathbf{M}}$ min.pol.-jával.

Minimálpolinom tulajdonságai

T L! $\mathsf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

1. A-nak pontosan egy μ_A minimálpolinomja van.
2. Bármely p polinomra $p(\mathsf{A}) = \mathsf{O} \iff \mu_\mathsf{A} \mid p$.
3. $\mu_\mathsf{A} \mid \chi_\mathsf{A}$
4. A minden sajátértéke gyöke μ_A-nak.

B 1. $\exists$ annullátor $\rightsquigarrow$ $\exists$ főpolinom annullátor
Tfh p és q két különböző minimális fokszámú főpolinom, melyekre $p(\mathsf{A}) = q(\mathsf{A}) = \mathsf{O} \rightsquigarrow (p - q)(\mathsf{A}) = p(\mathsf{A}) - q(\mathsf{A}) = \mathsf{O} \rightsquigarrow p = q$.
2. $\mu_\mathsf{A} \mid p \rightsquigarrow p = \mu_\mathsf{A} q$ vmilyen q pol.-ra $\rightsquigarrow p(\mathsf{A}) = \mu_\mathsf{A}(\mathsf{A}) q(\mathsf{A}) = \mathsf{O}$.
$p(\mathsf{A}) = \mathsf{O}$ és $p = \mu_\mathsf{A} q + r$, ahol r foka kisebb, mint μ_A foka, másrészt $\mathsf{O} = p(\mathsf{A}) = \mu_\mathsf{A}(\mathsf{A}) q(\mathsf{A}) + r(\mathsf{A}) \rightsquigarrow r(\mathsf{A}) = \mathsf{O} \rightsquigarrow r = 0$.
3. az előzőekből
4. $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár $\rightsquigarrow \mathsf{A}^k \mathbf{x} = \lambda^k \mathbf{x}$ $(k \in \mathbb{N}_0) \rightsquigarrow \forall$ p-re $p(\mathsf{A})\mathbf{x} = p(\lambda)\mathbf{x}$.
$\mu_\mathsf{A}(\mathsf{A})\mathbf{x} = \mu_\mathsf{A}(\lambda)\mathbf{x}$, de $\mu_\mathsf{A}(\mathsf{A}) = \mathsf{O}$, és $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, ezért $\mu_\mathsf{A}(\lambda) = 0$.

- **m** Ha $\chi_{\mathsf{A}}(x) = \prod_i (x-\lambda_i)^{a_i}$, akkor a 3.-beli oszthatóság miatt $\mu_{\mathsf{A}}(x) = \prod_i (x-\lambda_i)^{m_i}$, ahol $1 \leqslant m_i \leqslant a_i$, és a_i a λ_i algebrai multiplicitása.
- **m** Ha A nilpotens, ahol $\mathsf{A}^k = \mathsf{O}$, de $\mathsf{A}^{k-1} \neq \mathsf{O}$, akkor $\mu_{\mathsf{A}}(x) = x^k$, ugyanis x^k annullátor, így a minimálpolinom csak valamely osztója lehet. Az osztói viszont mind x^m alakúak, ahol $m \leqslant k$, de azok $m < k$ esetén nem annullátorok.
- **Á** A pontosan akkor diagonalizálható, ha minimálpolinomja különböző lineáris tényezők szorzata (egyelőre az egyik irányt tudjuk bizonyítani).

Példák minimálpolinomra

P Határozzuk meg a χ_A, μ_A, χ_B és μ_B polinomokat!

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M $\chi_\mathsf{A}(x) = \mu_\mathsf{A}(x) = x^6$, $\chi_\mathsf{B}(x) = x^6$, $\mu_\mathsf{B}(x) = x^3$.

Példák minimálpolinomra

P

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M $\chi_A(x) = \chi_B(x) = (x-1)^4$ Minimálpolinom lehet $(x-1)^k$, ahol $k \leqslant 4$. Mivel

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és $A^2 - 2A + I = O$, de $A - I \neq O$, ezért $\mu_A(x) = (x-1)^2$.
$B^2 - 2B + I = O$, de $B - I \neq O$, ezért $\mu_B(x) = (x-1)^2$.

Példák minimálpolinomra

P Írjuk föl a következő mátrix minimálpolinomját!

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

M Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekkor $\chi_A(x) = x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$, $\chi_B(x) = x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$, így $\chi_M(x) = (x-4)(x+1)(x-5)(x+2)$, de mivel nincsenek többszörös gyökök, ez egyúttal a minimálpolinom is.

Frobenius kísérő mátrix

Á Bármely $\chi(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 \in \mathbb{F}[x]$ polinomhoz létezik olyan $\mathbf{C} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrix, melynek χ (vagy $-\chi$) a karakterisztikus polinomja. Egy ilyen mátrix a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

mátrix.

D E mátrixot a polinom kísérő mátrixának nevezzük.

B A karakterisztikus polinomot adó determinánsban alulról minden sor x-szeresét a fölötte lévőhöz adva kapjuk, hogy

$$\chi_{\mathrm{C}}(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\chi(x) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & ? \\ 0 & 1 & \dots & 0 & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}-x \end{vmatrix}$$

Így $\chi_{\mathrm{C}}(x)$ előjelszorzót nem számítva megegyezik a megadott $\chi(x)$ polinommal.

- **Á** A kísérő mátrix minimálpolinomja megegyezik karakterisztikus polinomjával (egy -1 szorzó erejéig).
- **B** Tetszőleges, de nem csupa zérus c_j konstansokra

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j \mathbf{C}^j\right) \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix},$$

azaz nincs n-nél alacsonyabb fokú annullátor, tehát $\mu(\mathbf{C}) = (-1)^n \chi(\mathbf{C})$.

Hasonlóság erejéig hány van?

P Hasonlóság erejéig hány olyan 2×2-es valós/komplex $\mathbf{A}$ mátrix van, melyre $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$?

M $\mu_{\mathbf{A}}(x) \mid x^3 - 1$

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ és $\deg \mu_{\mathbf{A}} \leqslant \deg \chi_{\mathbf{A}} = 2$:

1. $\mu_{\mathbf{A}}(x) = x - 1$: $\mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{O} \rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{I} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ ✓
2. $\mu_{\mathbf{A}}(x) = x^2 + x + 1$: gyökei nem valósak $\rightsquigarrow$ tetszőleges $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorra $\mathbf{v}$ és $\mathbf{Av}$ függetlenek. E bázisban a mátrixa $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, ui.:

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{Av} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Av} \mapsto \mathbf{A}^2\mathbf{v} = (-\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{v} = -\mathbf{v} - \mathbf{Av} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Tehát hasonlóság erejéig 2 ilyen mátrix van (utóbbira végtelen sok lehetőséggel, ha más bázisban írjuk fel).

- $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$: $x^3 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)$, ahol $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ a primitív 3. egységgyök.

1. $\deg \mu_{\mathbf{A}} = 1$: $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, $\varepsilon\mathbf{I}$ vagy $\varepsilon^2\mathbf{I}$
2. $\deg \mu_{\mathbf{A}} = 2 \rightsquigarrow \mu_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}}$ és $\chi_{\mathbf{A}}$ minden gyöke egyszeres $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}$ diagonalizálható és diagonális elemei $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ közül kettő.

- Tehát hasonlóság erejéig 6 ilyen mátrix van:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

utóbbira $\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbb{C}$ fölött.

n rozmár

F (Freud–Gyarmati: Számelmélet 1.6.28) n rozmár ül egy kerek asztal körül, mindegyik előtt egy érme. Mindegyik megnézi a jobb szomszédja előtti érmét. Ha az fej, vezényszóra megfordítja a sajátját! Ezt addig folytatják, míg van változás. Milyen n-re igaz, hogy a játék bármely kezdeti állapot esetén véget ér?

M $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n$, $x_i = 0$, ha írás, $x_i = 1$, ha fej.

- Pozitív körüljárás szerint indexelve egy lépés egy lineáris $\mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$ trafót ad, melynek mátrixa is felírható:

$$\begin{aligned} x_1 &\leftarrow x_1 + x_2 \\ x_2 &\leftarrow x_2 + x_3 \\ &\vdots \\ x_n &\leftarrow x_n + x_1 \end{aligned} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- A k-adik lépés eredménye $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$.

$$
\begin{aligned}
\forall \mathbf{x}\text{-re véget ér} &\iff \forall \mathbf{x}\,\exists k:\ \mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&\iff \forall i\,\exists k_i:\ \mathbf{A}^{k_i}\mathbf{e}_i = \mathbf{0} \\
&\iff \exists k\,\forall i:\ \mathbf{A}^k\mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad (k = \max k_i) \\
&\iff \exists k:\ \mathbf{A}^k = \mathbf{O} \\
&\iff \exists k:\ \mu_{\mathbf{A}}(x) \mid x^k \quad (\text{minden sajátérték } 0) \\
&\iff \chi_{\mathbf{A}}(x) = (-x)^n = x^n \quad (\mathbb{F}_2\text{-ben vagyunk})
\end{aligned}
$$

$$
\chi_{\mathbf{A}}(x) = |\mathbf{A} - x\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1-x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 1-x \end{vmatrix} =
$$

$$
(1-x)(1-x)^{n-1} + (-1)^{n-1}\cdot 1 = (x+1)^n + 1
$$

- Milyen n-re lesz $(x+1)^n+1=x^n$, azaz $(x+1)^n=x^2+1$?
- Ha $n=2^a$, akkor $(x+1)^{2^a}=(x^2+1)^{2^{a-1}}=\cdots=x^{2^a}+1$.
- Ha $n=2^a m$, $m>1$, $2\nmid m$, akkor $(1+x)^{2^a m}=(1+x^{2^a})^m=1+mx^{2^a}+\ldots+x^{2^a m}\neq x^{2^a m}+1$.
- Tehát pontosan a 2-hatvány n-ekre ér mindig véget a játék.

Invariáns alterek

Invariáns alterek definíciója

D Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altér az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció (illetve az L valamely bázisbeli $\mathbf{L}$ mátrixának) invariáns altere, ha minden $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ vektorra $L\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ($\mathbf{L}\mathbf{x} \in \mathcal{U}$).

T Az $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altér pontosan akkor invariáns altér az L lineáris transzformációra nézve, ha $\mathcal{U}$ egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ bázisának minden vektorára $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ ($i = 1, \dots, k$).

B ($\Rightarrow$) $\mathcal{U}$ invariáns altér $\rightsquigarrow$ $\mathcal{U}$ minden vektorának képe $\mathcal{U}$-ban van $\rightsquigarrow$ $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ ($i = 1, \dots, k$).

($\Leftarrow$) $\forall\ \mathbf{u}_i : L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$

L! $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_k\mathbf{u}_k \rightsquigarrow$

$$L\mathbf{x} = x_1L\mathbf{u}_1 + x_2L\mathbf{u}_2 + \dots + x_kL\mathbf{u}_k \in \mathcal{U},$$

P Tekintsük az $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{L}\mathbf{x}$ mátrixleképezést, ahol

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{U} = \operatorname{span}((1,-1,2,-1),(1,2,-1,2))$ altér invariáns altere az L lineáris transzformációnak.

M $L\mathbf{u} = (1,-2,3,-2)$, $L\mathbf{v} = (1,1,0,1)$

Elég megmutatni, hogy az $[\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]$ rangja 2.

\- (még megmutathatjuk azt is, hogy e voktorok és képeik közt mi a lineáris kapcsolat:

$$\mathbf{rref}\left([\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix},$$

azaz $L\mathbf{u} = \frac{4}{3}\mathbf{u} - \frac{1}{3}\mathbf{v}$, $L\mathbf{v} = \frac{1}{3}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{v}$.)

F Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ felcserélhetők, akkor $\mathbf{A}$ minden sajátaltere $\mathbf{B}$-nek invariáns altere!

M Ha $\mathcal{V}_\lambda = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$ és $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_\lambda$, akkor $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{v}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{B}\lambda\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{B}\mathbf{v} \rightsquigarrow \mathbf{B}\mathbf{v} \in \mathcal{V}_\lambda$

F Az A lin.trafó minden polinomjának magtere és képtere A-invariáns (a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix minden polinomjának nulltere és oszloptere $\mathbf{A}$-invariáns).

M L! $p \in \mathbb{F}[x]$, $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Ha $\mathbf{v} \in \mathcal{N}(p(\mathbf{A})) \rightsquigarrow p(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0} \rightsquigarrow$ $p(\mathbf{A})(\mathbf{A}\mathbf{v}) = p(\mathbf{A})\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}p(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{A}\mathbf{v} \in \mathcal{N}(p(\mathbf{A}))$

\- Ha $\mathbf{v} \in \mathcal{O}(p(\mathbf{A})) \rightsquigarrow \exists\mathbf{u} :\ \mathbf{v} = p(\mathbf{A})\mathbf{u} \rightsquigarrow$ $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}p(\mathbf{A})\mathbf{u} = p(\mathbf{A})\mathbf{A}\mathbf{u} \in \mathcal{O}(p(\mathbf{A}))$

Blokkháromszög mátrixok

T Blokkháromszög mátrix és az invariáns altér: L! az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin trafónak $\mathcal{U}$ invariáns altere. Ekkor L mátrixa

$$\mathsf{L} = \begin{bmatrix} \mathsf{U} & * \\ \mathsf{O} & * \end{bmatrix}$$

a $\mathcal{V}$ minden olyan bázisában, mely tartalmazza $\mathcal{U}$ bázisát.

P Az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixban az $\mathcal{U} = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \leqslant \mathbb{R}^4$ tér invariáns altere.

B L! $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ az $\mathcal{U}$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \dots, \mathbf{u}_n\}$ a $\mathcal{V}$ bázisa. Mivel

$$L\mathbf{u}_i = u_{i1}\mathbf{u}_1 + \dots + u_{ir}\mathbf{u}_r + 0\mathbf{u}_{r+1} + \dots + 0\mathbf{u}_n \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

ezért a mátrix alakja

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{r1} & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{1r} & u_{2r} & \dots & u_{rr} & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & * \\ \mathbf{O} & * \end{bmatrix}.$$

Blokkdiagonális mátrixok

T **Blokkdiagonális mátrixok és az invariáns alterek:** L! az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin trafó két invariáns altere $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$. Ha $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, akkor L mátrixa

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{W} \end{bmatrix}$$

a $\mathcal{V}$ minden olyan bázisában, mely az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ bázisainak uniója.

m Általánosítás: ha $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_k$ a $\mathcal{V}$ vektortér invariáns alterei, és $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{U}_k$, akkor L mátrixa blokkdiagonális alakú minden olyan bázisban, mely az alterek bázisainak egyesítése.

m
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \{\mathbf{e}_4\}, \\ \mathcal{U}_3 &= \{\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\} \\ \mathcal{V} = \mathbb{R}^6 &= \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3 \end{aligned} .$$

B L! $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ és $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{n-r}\}$ az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ egy-egy bázisa. Mivel $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, ezért egyesítésük a $\mathcal{V}$ egy bázisát adja. L e bázisra vonatkozó mátrixa a bázisvektorok képvektoraiból alkotott mátrix:

$$L\mathbf{u}_i = u_{i1}\mathbf{u}_1 + \cdots + u_{ir}\mathbf{u}_r + 0\mathbf{w}_1 + \cdots + 0\mathbf{w}_{n-r}$$

$$L\mathbf{w}_j = 0\mathbf{u}_1 + \cdots + 0\mathbf{u}_r + w_{j,r+1}\mathbf{w}_1 + \cdots + w_{j,n}\mathbf{w}_{n-r}$$

ahol $i = 1, \ldots, r$, $j = r+1, \ldots, n$. Így a mátrix alakja

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \ldots & u_{r1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ u_{1r} & u_{2r} & \ldots & u_{rr} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & w_{r+1,r+1} & w_{r+2,r+1} & \ldots & w_{n,r+1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & w_{r+1,n} & w_{r+2,n} & \ldots & w_{n,n} \end{bmatrix},$$

Minimálpolinom relatív tényezőkre bontása

T L! $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\mu_{\mathbf{A}}(x) = f(x)g(x)$, ahol $f, g \in \mathbb{F}[x]$ relatív prím főpolinomok. Ekkor

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{G} \end{bmatrix},$$

ahol $\mu_{\mathbf{F}} = f$, $\mu_{\mathbf{G}} = g$.

B J! $\mathcal{A} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$, L! $\mathcal{V} = \mathbb{F}^n, \mathcal{U} = \operatorname{Im} g(\mathcal{A}), \mathcal{W} = \operatorname{Im} f(\mathcal{A})$.
Belátjuk, hogy $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

- $\mathcal{U} \leqslant \operatorname{Ker} f(\mathcal{A}), \mathcal{W} \leqslant \operatorname{Ker} g(\mathcal{A})$: $f(\mathcal{A})(g(\mathcal{A})\mathbf{v}) = \mu_{\mathbf{A}}(\mathcal{A})\mathbf{v} = \mathcal{O}\mathbf{v} = \mathbf{0} \rightsquigarrow$ $\mathcal{U} \leqslant \operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$ (a másik ugyanígy)
- $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ $\mathcal{A}$-invariáns: $\mathcal{A}(g(\mathcal{A})\mathbf{v}) = g(\mathcal{A})(\mathcal{A}\mathbf{v}) \in \operatorname{Im} g(\mathcal{A})$ (a m.u.í)
- $\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{V}$: $1 = a(x)f(x) + b(x)g(x) \rightsquigarrow$ $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \ \mathbf{v} = \mathcal{I}\mathbf{v} = a(\mathcal{A})f(\mathcal{A})\mathbf{v} + b(\mathcal{A})g(\mathcal{A})\mathbf{v} \in \mathcal{W} + \mathcal{U} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$.
- $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\} = \mathcal{O}$: $\mathbf{v} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W} \rightsquigarrow \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) \cap \operatorname{Ker} g(\mathcal{A}) \rightsquigarrow$ $\mathbf{v} = \mathcal{I}\mathbf{v} = a(\mathcal{A})f(\mathcal{A})\mathbf{v} + b(\mathcal{A})g(\mathcal{A})\mathbf{v} = a(\mathcal{A})\mathbf{0} + b(\mathcal{A})\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

- Tehát $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ és megfelelő bázisban A mátrixa $\begin{bmatrix} \mathsf{F} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{G} \end{bmatrix}$.
- A megfelelő bázist jelölje $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathcal{U}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{W}}$. Ekkor F az $A|_{\mathcal{U}}$ mátrixa $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$-ban, G az $A|_{\mathcal{W}}$ mátrixa $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$-ben.
- $\mathcal{U} \leqslant \operatorname{Ker} f(A)$, $\mathcal{W} \leqslant \operatorname{Ker} g(A) \rightsquigarrow$
  $f(A)(\mathcal{U}) = \mathcal{O}$, $g(A)(\mathcal{W}) = \mathcal{O} \rightsquigarrow$
  $f(\mathsf{F}) = \mathsf{O}$, $f(\mathsf{G}) = \mathsf{O} \rightsquigarrow$
  $\mu_{\mathsf{F}} \mid f$, $\mu_{\mathsf{G}} \mid g$.
- Ha valamelyik valódi osztó lenne, akkor a $\nu = \mu_{\mathsf{F}}\mu_{\mathsf{G}}$ polinomra

$$\nu(\mathsf{A}) \sim \nu\left(\begin{bmatrix} \mathsf{F} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{G} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \nu(\mathsf{F}) & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \nu(\mathsf{G}) \end{bmatrix} = \mathsf{O} \qquad \text{lenne.}$$

- Tehát $\mu_{\mathsf{F}} = f$, $\mu_{\mathsf{G}} = g$.

K Ha $\mu_{\mathsf{A}}(x) = (x - \lambda_1)^{b_1} \dots (x - \lambda_k)^{b_k}$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ különböző sajátértékek, akkor A hasonló egy olyan blokkdiagonális $\operatorname{diag}(\mathsf{B}_1, \dots, \mathsf{B}_k)$ mátrixhoz, ahol $\mu_{\mathsf{B}_i} = (x - \lambda_i)^{b_i}$ $(i = 1, 2 \dots, k)$.

Általánosított sajátvektorok

Általánosított sajátvektorok és a Jordan-blokk

m Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

mátrix hatása a standard bázison:
$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{e}_1 &= 4\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Átrendezés után:
$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

- $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ hatásának diagramja: $\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_3$
- Eszerint $\mathbf{e}_1$ sajátvektor, és $\mathbf{A}$-nak más sajátvektora nincs, viszont

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2\mathbf{e}_2 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3\mathbf{e}_3 &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Általánosított sajátvektor

D Az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó általánosított sajátvektorának nevezzük, ha valamilyen k természetes számra $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
$k = 1$ esetén $\mathbf{x}$ sajátvektor. Az általánosított sajátvektorokból álló $\mathbf{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sorozatot Jordan-láncnak nevezzük, ha $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ és $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.
Egy tér diszjunkt Jordan-láncokból álló bázisát Jordan-bázisnak nevezzük.

m A Jordan-lánc definíciója korrekt: ha $\mathbf{x}_k$ általánosított sajátvektor, melyre $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$, akkor minden $i < k$ esetén $\mathbf{x}_{k-i} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i\mathbf{x}_k$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ vektorok is általánosított sajátvektorok. Ez abból következik, hogy

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-i}\mathbf{x}_{k-i} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-i}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i\mathbf{x}_k = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

Jordan-lánc és Jordan-bázis konstrukciója

P Keressünk egy Jordan-bázist! Tudjuk, hogy $\chi_{\mathsf{A}}(x) = (4-x)^3$.

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

M A sajátaltér 1-dimenziós, melyet az $\mathbf{x} = (1,-1,1)$ vektor feszít ki.

- $(\mathsf{A}-4\mathsf{I})^3 = \mathsf{O}$, de $(\mathsf{A}-4\mathsf{I})^2 \neq \mathsf{O} \rightsquigarrow \exists \mathbf{x}_3 : (\mathsf{A}-4\mathsf{I})^2\mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$
-
$$(\mathsf{A}-4\mathsf{I})^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow (\mathsf{A}-4\mathsf{I})^2(x,y,z) = (-x+z, x-z, -x+z) \rightsquigarrow x \neq z$, pl $(1,0,0)$

$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathsf{A}-4\mathsf{I}} \mathbf{x}_1 = (-1,1,-1) \xleftarrow{\mathsf{A}-4\mathsf{I}} \mathbf{x}_2 = (2,-1,2) \xleftarrow{\mathsf{A}-4\mathsf{I}} \mathbf{x}_3 = (1,0,0)$

- A alakja az $\{x_1, x_2, x_3\}$ bázisban

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ugyanis $Ax_3 = x_2 + 4x_3$, $Ax_2 = x_1 + 4x_2$, $Ax_1 = 4x_1$, aminek mátrixszorzat alakja:

$$A[x_1 \,|\, x_2 \,|\, x_3] = [x_1 \,|\, x_2 \,|\, x_3] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\rightsquigarrow$ $X^{-1}AX = J$, ahol $X = [x_1 \,|\, x_2 \,|\, x_3]$ (X az $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{X}$ áttérés mátrixa!)

- Konkrétan: $J = X^{-1}AX =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

P $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $\chi_{\mathbf{C}}(x) = (4-x)^3$.

M Sajátaltér: $\operatorname{span}((1,0,1),(0,2,3))$

$(\mathbf{C} - 4\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$ (legföljebb kettő hosszú láncra számíthatunk),

$\exists \mathbf{x}_2 : (\mathbf{C} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$

-
$$\mathbf{C} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow$ pl. $\mathbf{x}_2 = (1,0,0)$ megfelel.

- $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{C} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = (-2,4,4)$ (a sajátaltérben van, de különbözik a kapott sajátvektoroktól: $\mathbf{x}_1 = (-2,4,4) = -2(1,0,1) + 2(0,2,3)$.)
- $\mathbf{y}_1$ legyen független $\mathbf{x}_1$-től:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (-2,4,4) \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (1,0,0)$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{y}_1 = (1,0,1)$$

- C alakja az $\{x_1, x_2, y_1\}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- $J = X^{-1}AX =$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jordan-blokk

D Azt a négyzetes mátrixot, melynek főátlójában azonos λ értékek, fölötte 1-esek, egyebütt 0-k állnak, Jordan-blokknak nevezzük:

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{1}$$

m Egy Jordan-blokknak a standard bázis minden vektora általánosított sajátvektora, ugyanis $i > 1$ esetén $\mathbf{J}_\lambda \mathbf{e}_i = \lambda \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i-1}$, azaz $(\mathbf{J}_\lambda - \lambda \mathbf{I})\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i-1}$, és így e vektorok egyetlen Jordan-láncot alkotnak: $\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{J}_\lambda - \lambda\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{J}_\lambda - \lambda\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{J}_\lambda - \lambda\mathbf{I}} \dots \xleftarrow{\mathbf{J}_\lambda - \lambda\mathbf{I}} \mathbf{e}_n$

m Sőt, ha egy mátrix Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, akkor a standard bázis diszjunkt Jordan-láncokból áll.

Jordan-féle normálalak

Jordan-tétel

T Tfh $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, és $\chi_{\mathbf{A}}(x)$ lineáris tényezők szorzatára bomlik $\mathbb{F}$ fölött (azaz minden gyöke $\mathbb{F}$-beli). Ekkor **A** hasonló egy ún. Jordan-mátrixhoz, mely Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, azaz $\exists \mathbf{C} : \mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ alakja

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \tag{2}$$

ahol k az **A** független sajátvektorainak maximális száma, és $\mathbf{J}_i$ az i-edik sajátvektorhoz tartozó Jordan-blokk.

m Algebrailag zárt $\mathbb{F}$ test esetén minden $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrix hasonló egy Jordan-mátrixhoz, és minden lineáris $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ trafóhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-mátrix.

D Az $\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}$ alakú felbontását az $\mathbf{A}$ Jordan-felbontásának nev.

K Minden $\mathbb{C}^{n\times n}$-beli mátrixhoz és minden $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ lineáris transzformációhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-normálalakú.

m A különböző Jordan-blokkok különböző sajátvektorokhoz tartoznak, de egy sajátérték több Jordan-blokkban is szerepelhet.

m A tétel hasonlóságról szól, így lineáris transzformációkra is megfogalmazható:

T (Jordan-tétel másik alakja) L! $\mathcal{V}$ véges dimenziós $\mathbb{F}$ fölötti vektortér, $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció és χ_A minden gyöke legyen $\mathbb{F}$-beli. Ekkor $\mathcal{V}$-nek van Jordan-bázisa.

D E bázisban A mátrixa Jordan-mátrix, melyet az A Jordan-féle normálalakjának nevezünk. Ez egyúttal normálalakja az A bármely más bázisban felírt $\mathbf{A}$ mátrixának is.

P Hány nem hasonló normálalak létezik, ha $\chi(\lambda) = (1 - \lambda)^4$.

M

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jordan-tétel bizonyítása

B L! $\mathcal{V}$ vektortér és $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin. trafó.

Megmutatjuk, hogy ha van maximum k független sajátvektor, akkor található k Jordan-lánc is, melyek vektorai a tér bázisát adják.

1 Teljes indukció: $n = 1$ ✓, tfh minden n-nél kisebb dimenzióra igaz

2 $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár, $\mathcal{N}_\lambda := \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ a sajátaltér, dimenziója r, $\mathcal{U}_\lambda := \operatorname{Im}(A - \lambda I)$.

$r > 0 \rightsquigarrow \dim(\mathcal{U}_\lambda) = n - r < n$

3 $\mathcal{U}_\lambda$ invariáns altere A-nak, azaz $A(\mathcal{U}_\lambda) \subseteq \mathcal{U}_\lambda$,

ugyanis $\mathcal{U}_\lambda$ elemei $(A - \lambda I)\mathbf{v}$ alakúak ($\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tetszőleges),
$A(A - \lambda I)\mathbf{v} = (A^2 - \lambda A)\mathbf{v} = (A - \lambda I)(A\mathbf{v}) \in \mathcal{U}_\lambda$.

4 Az indukciós feltevés szerint A-nak az $\mathcal{U}_\lambda$-ra való megszorításához léztezik Jordan-láncokból álló bázis:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda_1\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{A-\lambda_1\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{A-\lambda_1\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_1}^1 \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda_2\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{A-\lambda_2\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{A-\lambda_2\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_2}^2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda_p\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{A-\lambda_p\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{A-\lambda_p\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_p}^p
\end{array}$$

5 $\mathcal{Q} = \mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda$, $q = \dim(\mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda)$

$q = 0$ $(\mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda = \{\mathbf{0}\}) \rightsquigarrow \mathcal{U}_\lambda$ és $\mathcal{N}_\lambda$ kiegészítő alterek $\rightsquigarrow \mathcal{U}_\lambda$ J-bázisa $\cup$ $\mathcal{N}_\lambda$ egy bázisa = tér egy Jordan-bázisa

$q > 0$. $\mathcal{N}_\lambda$ elemei az A sajátvektorai: $\mathcal{Q}$ egy bázisa $\mathbf{x}_1^1$, $\mathbf{x}_1^2$,..., $\mathbf{x}_1^q$. Láncaik végén $\mathbf{x}_{s_k}^k \in \mathcal{U}_\lambda \rightsquigarrow \exists \mathbf{y}_k$: $(A - \lambda I)\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{s_k}^k$ $(k = 1, 2, \dots, q)$.

6 $\dim(\mathcal{N}_\lambda) = r$, $\dim(\mathcal{Q}) = q \rightsquigarrow \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-q}$ sajátvektorokból:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & & & \mathcal{V} \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{z}^1 & & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & \mathcal{N}_\lambda & & & & & & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{z}^{r-q} & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \mathcal{U}_\lambda & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \dots & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_{s_1}^1 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{y}^1 & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_1^q & \xleftarrow{A-\lambda I} & \dots & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_{s_q}^q & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{y}^q & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda_{q+1} I} & \mathbf{x}_1^{q+1} & \xleftarrow{A-\lambda_{q+1} I} & \dots & \xleftarrow{A-\lambda_{q+1} I} & \mathbf{x}_{s_{q+1}}^{q+1} & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \dots & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \mathbf{x}_{s_p}^p & & & &
\end{array}
$$

7 $\mathbf{x}$-vektorok száma $n - r$, $\mathbf{y}$-vektorok száma q, $\mathbf{z}$-vektorok száma $r - q$, $(n - r) + q + (r - q) = n$.

8 Belátjuk, hogy függetlenek.

- A konstrukcióból $\rightsquigarrow$: $\mathbf{x}$- és $\mathbf{z}$-vektorok mind függetlenek.
- Az $\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^q$ vektorok lineárisan függetlenek, hisz $A - \lambda I$ általi képvektoraik (az $\mathbf{x}^i_{s_i}$ vektorok) függetlenek.
- Az $\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^q$ vektorok nem-triviális lineáris kombinációi nem eshetnek $\mathcal{N}_\lambda$-ba, mert azt $A - \lambda I$ a $\mathbf{0}$-ba viszi, így az $\mathbf{y}$-vektorok függetlenek a $\mathbf{z}$-vektoroktól.
- Az $\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^q$ vektorok nem-triviális lineáris kombinációi nem eshetnek $\mathcal{U}_\lambda$-ba sem, mert az $A - \lambda I$ egy ilyen lineáris kombinációt az A transzformáció λ-hoz tartozó Jordán-láncai végső vektorainak lineáris kombinációjába visz. Ha $\mathcal{U}_\lambda$ bármely vektorának e vektor lenne a képe, akkor az általánosított sajátvektor lenne, azok alterében lévő vektorokat viszont $A - \lambda I$ nem vihet a fenti lineáris kombinációba.

A Jordan-alak egyértelműsége

L

1. Egy $k \times k$-as Jordan-blokk hatványai rangjának sorozata $\lambda = 0$ esetén: k, $k-1$, $k-2$..., 2, 1, 0; $\lambda \neq 0$ esetén: k, k,..., k.
2. Egy $\mathbf{J}$ Jordan-mátrixra $d_k := r((\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^{[}k-1]) - r((\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^k)$
   = a λ-hoz tartozó legalább k-adrendű Jordan-blokkok száma
   = a λ-hoz tartozó legalább k-hosszú Jordan-láncok száma
3. Egy $\mathbf{J}$ Jordan-mátrixra $n_k = d_k - d_{k+1}$
   = a λ-hoz tartozó k-adrendű Jordan-blokkok száma
   = λ-hoz tartozó k-hosszú Jordan-láncok száma
4. A legnagyobb λ-blokk mérete $s \iff s$ az a legkisebb kitevő, melyre $r((\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^s) = r((\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^{s+1})$.

B

1. $\lambda = 0$ ✓; $\lambda \neq 0$ esetén a blokk invertálható ✓
2. A k-nál kisebb rendű blokkok rangja e hatványokban 0, minden más blokkban eggyel csökken
4. ha van s-nél hosszabb lánc, a rang csökken s-ről $s+1$-re

- **T** Egy mátrix Jordan-normálalakja a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.
- **B** Elég belátni, hogy bármely két hasonló mátrix Jordan-alakjának meghatárázó adatai a hasonlóságra nézve invariánsak.
- \- A Jordan-blokkok, és így a Jordan-láncok száma megegyezik a független sajátvektorok maximális számával – ez invariáns.
- \- A λ-hoz tartozó $k \times k$-as blokkok száma Jordan-mátrix esetén csak a $\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangjától függ, ami invariáns.
- **K** Az $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalkjának meghatározásához elég ismerni $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangját minden λ sajátértékre.
- **B** ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{J}$, akkor $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \sim \mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}$

  $\rightsquigarrow$ $\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}$ és $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangjai megegyeznek

P Írjuk fel az $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ Jordan-normálalakját, ha minden sajátértéke λ, és az $r_k = \mathrm{r}((A - \lambda I)^k)$ rangok

k	0	1	2	3	4
rang	13	8	5	2	0

M (A láncok száma 5, mert $13 - \mathrm{r}(A - \lambda I) = 5$). d_k és n_k:

k	0		1		2		3		4
r_k	13		8		5		2		0
d_k		5		3		3		2	
n_k			2		0		1		2

- Tehát a k-hosszú láncok száma: $n_1 = 2$, $n_3 = 1$, $n_4 = 2$:

$$\begin{array}{lllllllll}
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_2^1 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_3^1 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_4^1 \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_2^2 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_3^2 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_4^2 \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_1^3 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_2^3 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_3^3 & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_1^4 & & & & & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}_1^5 & & & & & &
\end{array}$$

- Tehát az A lineáris leképezés Jordan-mátrixa:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc|c|c}
\lambda & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & \lambda & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & \lambda & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & \lambda & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & \lambda & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & \lambda & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & \lambda & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & \lambda & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \lambda & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & \lambda & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & \lambda & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & \lambda & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & \lambda
\end{array}\right]$$

P $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{10\times 10}$, λ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátérték. Az $r_k = \mathrm{r}((\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I})^k)$ rangok rendre $r_1 = 5$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$, $r_4 = 0$. Írjuk fel a Jordan-normálalakját!

M A blokkok száma, ami megegyezik a Jordan-láncok számával 5, mivel $n - \mathrm{r}(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) = 10 - 5 = 5$.

A leghosszabb lánc hossza 4, mivel $\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}$ legkisebb zérusmátrixot adó hatványa a 4-dik.

Az egyenletrendszer és megoldása, valamint a J Jordan-mátrix:

k	0		1		2		3		4
r_k	10		5		2		1		0
d_k		5		3		1		1	
n_k			2		2		0		1

$$\Rightarrow \mathsf{J} = \left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c|c}
\lambda & 1 & & & & & & & & \\
 & \lambda & 1 & & & & & & & \\
 & & \lambda & 1 & & & & & & \\
 & & & \lambda & & & & & & \\
\hline
 & & & & \lambda & 1 & & & & \\
 & & & & & \lambda & & & & \\
\hline
 & & & & & & \lambda & 1 & & \\
 & & & & & & & \lambda & & \\
\hline
 & & & & & & & & \lambda & \\
\hline
 & & & & & & & & & \lambda
\end{array}\right]$$

P $A \in \mathbb{C}^{14\times 14}$, sajátértékei $\lambda = 3, 2, 1$.

$A - 3I$ hatványainak rangja rendre: 12, 11, 10, 9;
$A - 2I$ hatványainak rangja rendre: 12, 10, 9;
$A - I$ hatványainak rangja rendre: 11, 10.

Írjuk fel a Jordan-normálalakját!

M $n = 14$, a multiplicitások a hatványok alapján $m(3) \geqslant 5$, $m(2) \geqslant 5$, $m(1) \geqslant 4$. Ezek összege 14, így mindenütt egyenlőség áll.

$\lambda = 3$:

k	0		1		2		3		4
r_k	14		12		11		10		9
d_k		2		1		1		1	
n_k			1		0		0		1

$\Rightarrow$ $n_4 = 1$, $n_1 = 1$

$$\lambda = 2: \quad \begin{array}{c|ccccccc} k & 0 & & 1 & & 2 & & 3 \\ \hline r_k & 14 & & 12 & & 10 & & 9 \\ d_k & & 2 & & 2 & & 1 & \\ n_k & & & 0 & & 1 & & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} n_3 = 1 \\ n_2 = 1 \end{array}$$

$$\lambda = 1: \quad \begin{array}{c|ccccc} k & 0 & & 1 & & 2 \\ \hline r_k & 14 & & 11 & & 10 \\ d_k & & 3 & & 1 & \\ n_k & & & 2 & & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} n_2 = 1 \\ n_1 = 2 \end{array}$$

- Összefoglalva: $J = \left[\begin{array}{cccc|c|ccc|cc|cc|c|c}
3 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & 3 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & 3 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & 3 & & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & & 3 & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & 2 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & 2 & & & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & 2 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & 2 & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & 1 & & \\ \hline
 & & & & & & & & & & & & 1 & \\ \hline
 & & & & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]$

- Ha $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k-1}$ valamely lépcsős alakja $\mathbf{L}$, akkor $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k}$ lépcsős alakját egyszerűbb az $\mathbf{L}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$-ból számítani, mivel $\mathbf{L}$ kiszámolása csak elemi mátrixokkal való balról szorzást jelent, azaz

$$\mathbf{L}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k-1}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k}.$$

- Ha m_λ a λ algebrai multiplicitása, és s a legnagyobb λ-blokk rendje, akkor $\mathrm{r}((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{s}) = n - m_\lambda$.
- Ha a rangok csökkenése eléri az 1-et, azaz $d_k = 1$, akkor – mivel a d_k sorozat monoton csökkenő – a rangok sorozata 1-esével csökken addig, amíg el nem éri az $n - m_\lambda$ értéket.

P A rangok számítása: Mi a Jordan-normálalakja a köv. mátrixnak, ha $\chi(x) = -(x-1)^4(x+1)$?

$$\begin{bmatrix} -7 & -2 & -8 & 0 & -3 \\ -4 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 9 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

M $\lambda = -1$: 1 db 1×1-es blokk ✓

- $\lambda = 1$: $\mathrm{r}(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ számítása

$$\begin{bmatrix} -8 & -2 & -8 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- $\rightsquigarrow r_1 = 3$

- $\mathrm{r}((\mathbf{A}-\mathbf{I})^2)$ számítása

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -2 & -8 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow r_2 = 2 \rightsquigarrow r_3 = 1\,(\rightsquigarrow r_4 = 1)$$

Innen a táblázat:

$$\begin{array}{c|ccccccccc} k & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ \hline r_k & 5 & & 3 & & 2 & & 1 & & 1 \\ d_k & & 2 & & 1 & & 1 & & 0 & \\ n_k & & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 \end{array}$$

- 1 db 1×1-es és 1 db 3×3-as blokk

F Igazoljuk, hogy minden invertálható komplex mátrixnak van négyzetgyöke! Igaz-e ez a szinguláris mátrixokra?

M $\mathsf{B}^2 = \mathsf{A} \iff (\mathsf{C}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{C})^2 = \mathsf{C}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{C}$, tehát feltehető, hogy A Jordan-mátrix, és abból elég blokkonként négyzetgyököt vonni, így tfh $\lambda \neq 0$, $\mu^2 = \lambda$ és

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}, \quad \mathsf{M} = \begin{bmatrix} \mu & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu \end{bmatrix}.$$

két Jordan-blokk.

- Megmutatjuk, hogy $\mathsf{M}^2 \sim \mathsf{A}$.
$\mathsf{M}^2 = (\mu\mathsf{I} + \mathsf{N})^2 = \mu^2\mathsf{I} + 2\mu\mathsf{N} + \mathsf{N}^2 = \lambda\mathsf{I} + 2\mu\mathsf{N} + \mathsf{N}^2 \rightsquigarrow$
$\chi_{\mathsf{M}^2}(x) = (\lambda - x)^n \rightsquigarrow \mathrm{r}(\mathsf{M}^2 - \lambda\mathsf{I}) = \mathrm{r}(2\mu\mathsf{N} + \mathsf{N}^2) = n - 1 \rightsquigarrow$ a sajátaltér 1-dimenziós $\rightsquigarrow$ a J-alak egyetlen Jordan-blokk $\rightsquigarrow$
$\exists\mathsf{C} : \mathsf{C}^{-1}\mathsf{M}^2\mathsf{C} = \mathsf{A} \rightsquigarrow (\mathsf{C}^{-1}\mathsf{M}\mathsf{C})^2 = \mathsf{A}$.

Jordan-mátrix és minimálpolinom

T Legyen az $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix spektruma $\sigma(\mathsf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$.

1. $\mu_\mathsf{A}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_s)^{m_s}$, ahol m_k a λ_k-hoz tartozó legnagyobb Jordan-blokk mérete.
2. $\mu_\mathsf{A} = \chi_\mathsf{A} \iff \mathsf{A}$ minden sajátértékének 1 a geometriai multiplicitása.
3. A diagonalizálható $\iff$ a minimálpolinom lineáris tényezők szorzata: $\mu_\mathsf{A}(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_s)$.

B Hasonló mátrixok minimálpolinomja azonos, elég csak a Jordan normálalakú mátrixokra szorítkozni. $\chi_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{a_i}$.

1. $\mu_{\mathbf{A}}(x) \mid \chi_{\mathbf{A}}(x)$, $x-\lambda_i \mid \mu_{\mathbf{A}}(x) \rightsquigarrow \mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{k_i}$ $(1 \leqslant k_i \leqslant a_i)$.
   $\mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{m_i}$ annullálja $\mathbf{A}$-t, hisz $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^{m_i}$ annullálja az összes λ_i-hez tartozó Jordan-blokkot $\rightsquigarrow \prod(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^{m_i} = \mathbf{O}$.
   ha vmely $x-\lambda_i$ tényező m_i-nél alacsonyabb hatványon szerepelne, nem annullálná a λ_i-hez tartozó legnagyobb Jordan-blokkot, így e blokk nem lenne zérus $\mu(\mathbf{A})$-ban sem $(\prod_{j\neq i}(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I}) \neq \mathbf{O})$
2. $\mu_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}} \iff \mathbf{A}$ minden sajátértékéhez egyetlen Jordan-blokk tartozik $\iff$ minden geometriai multiplicitás 1.
3. $\mathbf{A}$ diagonalizálható $\iff$ minden Jordan-blokkja 1×1-es $\iff$ a legnagyobb Jordan-blokkok 1×1-esek.

A Jordan-normálalak felírása a minimálpolinom ismeretében

T L! $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\mathbf{J}$ az $\mathbf{A}$-hoz hasonló Jordan-mátrix,
$\chi_{\mathbf{A}}(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)^{a_1}\dots(x-\lambda_k)^{a_k}$ és
$\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x-\lambda_1)^{b_1}\dots(x-\lambda_k)^{b_k}$, ahol $\lambda_1,\dots, \lambda_k$ különböző sajátértékek.

1. a_i a $\mathbf{J}$-ben a λ_i-hez tartozó Jordan-blokkok összmérete,
2. b_i a $\mathbf{J}$-ben a λ_i-hez tartozó Jordan-blokkok max mérete,
3. $\dim \mathcal{V}_{\lambda_i}$ a $\mathbf{J}$-ben a λ_i-blokkok száma.

B 1. ✓
2. A minimálpolinom a diagonális blokkok minimálpolinomjainak legkisebb közös többszöröse és egy $m \times m$-es λ-blokk minimálpolinomja $(x-\lambda)^m$.
3. $\mathbf{J}-\lambda_i\mathbf{I}$ zérussorait alulra téve lépcsős alakot kapunk, így $\dim \mathcal{V}_{\lambda_i} = \mathbf{0}$-sorok száma $=$ $\mathbf{J}$-beli λ_i-blokkok száma.

K Ha χ_A minden gyökének $\leqslant 6$ a multiplicitása, akkor a fentiekből meghatározható a Jordan-normálalak.

P $\chi(x) = -(x-2)^5$, $\mu(x) = (x-2)^2$, $\dim \mathcal{V}_2 = 3$

M $5 = 2 + 2 + 1$

P $\chi(x) = -(x-2)^5$, $\mu(x) = (x-2)^3$, $\dim \mathcal{V}_2 = 3$

M $5 = 3 + 1 + 1$

P Határozzuk meg az A Jordan-normálalakját és minimálpolinomját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

M $r(A - I) = 2 \rightsquigarrow \dim \mathcal{V}_1 = 4 - 2 \rightsquigarrow 3 = 2 + 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mu(x) = (x-1)^2(x-3)$$

Egyszerű következmények

K L! $\mathbb{F}$ algebrailag zárt, $\mathcal{V}_\mathbb{F}$ vektortér, az $A : \mathcal{V}_\mathbb{F} \to \mathcal{V}_\mathbb{F}$ lineáris leképezés spektruma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$. Ekkor

$$\mathcal{V}_\mathbb{F} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_s,$$

ahol $\mathcal{U}_i$ a λ_i-hez tartozó általánosított sajátvektorok A-invariáns altere.

m A tétel analóg módon igaz $\mathcal{V}_\mathbb{F} = \mathbb{F}^n$, $\mathsf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ esetén is.

m A spektrálfelbontás némi módosítással kiterjeszthető nemdiagonalizálható mátrixokra (lin. leképezésekre) is:

K Spektráltétel általánosítása L! $\mathbb{F}$ alg. zárt, $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\mathbf{A}$ spektruma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$. Ekkor $\mathbf{A}$ felírható

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{A}\mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{P}_i\mathbf{A}\mathbf{P}_i$$

alakokban, ahol $\mathbf{P}_i$ a λ_i-hez tartozó spektrális vetítő, ami az $\mathcal{U}_i = \mathcal{N}((\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})^{m_i})$-re vetít $\mathcal{O}((\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})^{m_i})$ mentén.

B Bizonyítjuk, hogy ilyen felbontás létezik (a spektrálfelbontás bizonyítására alapozunk): L! $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$ a Jordan-felbontás,

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i, \text{ ahol: } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k \end{bmatrix}.$$

Láttuk, hogy $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$, $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, ha $i \neq j$.

$\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I} = \sum_i \mathbf{A}\mathbf{P}_i$, és $\mathbf{A} = \mathbf{I}\mathbf{A}\mathbf{I} = \sum_i \mathbf{P}_i\mathbf{A}\mathbf{P}_i$, mivel $\mathbf{P}_i\mathbf{A}\mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, hisz $\mathbf{P}_j$ az $\mathcal{U}_j$-re vetít, mely $\mathbf{A}$-inveriáns, és azt az alteret $\mathbf{P}_i$ a $\mathbf{0}$-ba viszi, ha $i \neq j$.

Valós Jordan-alak

Valós Jordan-alak

T Minden $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix hasonló egy olyan blokkdiagonális mátrixhoz, melynek minden diagonális blokkja vagy valós sajátértékhez tartozó Jordan-blokk, vagy egy komplex $a \pm b\mathrm{i}$ sajátértékpárhoz tartozó

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c|cc|cc}
a & b & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-b & a & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -b & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -b & a & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & b \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -b & a
\end{array}\right]$$

alakú blokk.

B Valós sajátértékhez tartozó invariáns altérben valós vektorokból is találunk Jordan-láncot, pl. a komplex láncok vektorainak valós része megfelel.

- Legyen $a + b\mathrm{i}$ komplex sajátérték t-hosszú Jordan-lánccal:
  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1\mathrm{i}$, $\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2\mathrm{i}$,..., $\mathbf{u}_t + \mathbf{v}_t\mathrm{i}$,
  így egyszerre 2 láncot kapunk, mert
  $\mathbf{A}(\mathbf{u}_j \pm \mathbf{v}_j\mathrm{i}) = (a \pm b\mathrm{i})(\mathbf{u}_j \pm \mathbf{v}_j\mathrm{i}) + \mathbf{u}_{j-1} \pm \mathbf{v}_{j-1}\mathrm{i}$, $(j = 2, \ldots, t)$
  $\mathbf{A}(\mathbf{u}_1 \pm \mathbf{v}_1\mathrm{i}) = (a \pm b\mathrm{i})(\mathbf{u}_1 \pm \mathbf{v}_1\mathrm{i})$.
- L! $t = 2$ (a $t = 1$ és a $t > 2$ esetek kezelése hasonló). A valós és imaginárius részek összevetéséből

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_1 = a\mathbf{u}_1 - b\mathbf{v}_1$$
$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = b\mathbf{u}_1 + a\mathbf{v}_1$$
$$\mathbf{A}\mathbf{u}_2 = a\mathbf{u}_2 - b\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_1$$
$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = b\mathbf{u}_2 + a\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$$

- Mátrix alakban

$$\mathrm{A}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix}$$

P Mi a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ komplex és valós Jordan-felbontása?

M $\chi(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5 = (x - 2 - \mathrm{i})(x - 2 + \mathrm{i})(x - 1)^2$
(kísérő mátrix)

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \to \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Oldjuk meg az $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$ egyenletrendszert:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 14 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -14 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

- $\rightsquigarrow \mathbf{x}_2 = (5, -4, 1, 0)$ megfelel.

- A komplex sajátértékekhez tartozó sajátvektorok:
- $\mathsf{A}-(2+\mathrm{i})\mathsf{I} = \begin{bmatrix} -2-\mathrm{i} & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -2-\mathrm{i} & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -2-\mathrm{i} & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 4-\mathrm{i} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2-\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 & -5+2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & 4-\mathrm{i} \end{bmatrix}$

  innen $\mathbf{y}_1 = (-2+\mathrm{i}, 5-2\mathrm{i}, -4+\mathrm{i}, 1)$
- A $2-\mathrm{i}$ sajátértékhez tartozó sajátvektort nem kell kiszámolni, mert az nyilván $\mathbf{y}_1$ konjugáltja lesz, azaz $\mathbf{y}_2 = (-2-\mathrm{i}, 5+2\mathrm{i}, -4-\mathrm{i}, 1)$
- Összefoglalva:

$$\mathsf{J} = \left[\begin{array}{c|c|cc} 2+\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2-\mathrm{i} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} -2+\mathrm{i} & -2-\mathrm{i} & -5 & 5 \\ 5-2\mathrm{i} & 5+2\mathrm{i} & 9 & -4 \\ -4+\mathrm{i} & -4-\mathrm{i} & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Innen a Jordan-felbontás $\mathbb{C}$-ben: $\mathsf{A} = \mathsf{CJC}^{-1}$.

- A valós felbontáshoz tekintsük a sajátvektorok valós és imaginárius részét:
  $\mathbf{u} = (-2, 5, -4, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -2, 1, 0)$.
- Ekkor

$$J_{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C_{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 & 5 \\ 5 & -2 & 9 & -4 \\ -4 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- A Jordan-felbontás $\mathbb{R}$-ben: $A = C_{\mathbb{R}} J_{\mathbb{R}} C_{\mathbb{R}}^{-1}$.