BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Bevezetés az algebrába 2

BMETE91AM37

Bilineáris függvények

H607 – 2017-03-20

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Kvadratikus alakok

Homogén másodfokú polinom – kvadratikus alak

D Homogén másodfokú polinom: minden tag másodfokú.

P Írjuk mátrixszorzat alakba a $2x^2 + 4xy - y^2$ polinomot!

M $2x^2 + 4xy - y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

D (Valós) kvadratikus alak (kvadratikus forma):

$$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

függvény, ahol $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix.

m $\mathbb{R}$ helyett bármely nem 2-karakterisztikájú (véges test esetén nem 2-hatvány elemű) test felett értelmezhető a kvadratikus alak így, de komplexekre érdekesebb lesz a

D komplex kvadratikus alak: $q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x}$

m Igazolni fogjuk, hogy komplex kvadratikus alaknál különböző mátrixok különböző alakot adnak, és egy ilyen alak pontosan akkor valós értékű, ha $\mathbf{A}$ önadjungált.

m Részletezve:

$$q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R};\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n a_{i1}x_i & \sum_{i=1}^n a_{i2}x_i & \dots & \sum_{i=1}^n a_{in}x_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^n a_{i1}x_ix_1+\sum_{i=1}^n a_{i2}x_ix_2+\ldots+\sum_{i=1}^n a_{in}x_ix_n$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j.$$

Kvadratikus alakok

Kvadratikus alak más bázisban

Áttérés más bázisra

m L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^n$ egy bázisa $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$, $\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = [\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \ldots\ \mathbf{c}_n]$ az áttérés mátrixa és $\mathbf{x}_\mathcal{C}$ az $\mathbf{x}$ vektor $\mathcal{C}$-beli koordinátás alakja. Ekkor $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x}_\mathcal{C}$, így

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{C}\mathbf{x}_\mathcal{C})^\mathsf{T}\mathbf{A}(\mathbf{C}\mathbf{x}_\mathcal{C}) = \mathbf{x}_\mathcal{C}^\mathsf{T}(\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{x}_\mathcal{C}.$$

D Azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ kongruensek, jelölése $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, ha van olyan *invertálható* $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C}$.
Az $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C}$ trafót kongruenciatranszformációnak nevezzük.

m A lineáris leképezés mátrixa báziscsere esetén hasonló mátrixra változik, a kvadratikus alak mátrixa egy vele kongruensre.

m Komplex kvadratikus alak esetén $\mathbf{B} = \mathbf{C}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{C}$.

K Milyenek lehetnek a $\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{D}$ diagonális mátrixok?

P Írjuk fel a $q(x,y) = x^2 - 6xy + y^2$ kvadratikus alakot a $\mathcal{C} = \{(2,1),(3,1)\}$ bázisban!

M A q kvadratikus forma mátrixszorzatos alakja

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Az áttérés mátrixa $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, így

$$\mathbf{C}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$$

Tehát a kvadratikus alak a $\mathcal{C}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ -8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = -7\xi^2 - 16\xi\eta - 8\eta^2.$$

Főtengelytétel kvadratikus alakokra

T L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus, $\mathbf{Q}$ ortogonális: $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \Lambda$ diagonális. Ekkor az $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ helyettesítés az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alakot az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\Lambda\mathbf{y}$ kvadratikus alakba transzformálja, mely kifejtve csak négyzetes tagokat tartalmaz, azaz

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\Lambda\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2, \tag{1}$$

ahol λ_1, λ_2,..., λ_n az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei.

m $\det\mathbf{Q} = \pm 1$. A $\mathbf{Q}$ oszlopaiból álló $\mathcal{Q}$ bázis mindig választható jobbsodrásúnak, azaz hogy $\det\mathbf{Q} = 1$ legyen. Ez elérhető, ha $\det\mathbf{Q} = -1$ esetén $\mathbf{Q}$ bármelyik oszlopát -1-szeresére változtatjuk. Ez a kvadratikus alakot nem befolyásolja, hisz abban csak a sajátértékek szerepelnek.

- A főtengelytétel alkalmazását egy kvadratikus alakon *főtengely-transzformációnak* nevezzük, az így létrejött alakot *kanonikus alaknak*.

Főtengelytranszformáció

P Határozzuk meg a $q(x, y) = 4xy$ kvadratikus forma kanonikus alakját!

M A mátrixszorzat-alak: $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

A sajátpárok: $(2, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1))$, $(-2, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1))$, így az áttérés mátrixa

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \rightsquigarrow$$

$$\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

tehát a kanonikus alak: $2\xi^2 - 2\eta^2$.

Főtengelytranszformáció

P Határozzuk meg *(a)* a $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8xy + 4xz$ kanonikus alakját és *(b)* azt az ONB-t, melyben ez az alakja.

M *(a)* A mátrixszorzatalak $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

- karakterisztikus polinom: $-\lambda^3 + 5\lambda^2 + 12\lambda - 36$, sajátértékek 6, -3, 2, a sajátvektorok rendre $(2, -2, 1)$, $(-5, -4, 2)$, $(0, 1, 2)$.
- A kvadratikus alak $\begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = 6\xi^2 - 3\eta^2 + 2\zeta^2$.
- *(b)* $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} < 0$ ezért egyik vektort -1-gyel szorozzuk $\rightsquigarrow$ jobbsodrású ONB: $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}})$, $(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.

Diagonalizálás szimultán sor-oszlopműveletekkel

- A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot elemi sorműveletekkel hozzuk felső háromszög alakra úgy, hogy minden sorművelettel azonos oszlopműveletet is végezzünk el utána.

Á E szimultán sor-oszlopműveletek szimmetrikus mátrixot szimmetrikusba visznek.

- E műveletek felírhatók elemi mátrixokkal való szorzással is. Ha $\mathbf{E}$ elemi mátrix, akkor $\mathbf{EA}$ az $\mathbf{A}$ sorain ugyanazt a műveletet végzi, mint $\mathbf{AE}^\mathsf{T}$ az $\mathbf{A}$ oszlopain (ugyanis $(\mathbf{EA})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{E}^\mathsf{T} = \mathbf{AE}^\mathsf{T}$).
- k ilyen műveletpár után a következőt kapjuk:

$$\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}\mathbf{E}_1^\mathsf{T}\mathbf{E}_2^\mathsf{T} \dots \mathbf{E}_k^\mathsf{T} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{AC} \cong \mathbf{A}.$$

- Ha tehát $\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{AC}$ felsőháromszög-mátrix, akkor mivel szimmetrikus, ezért diagonális.

P Küszöböljük ki a vegyes tagokat az $2xy + 2xz + 2yz$ kvadratikus alakban. (ld. a 27. oldal **B** mátrixát)

M A kvadratikus alak mátrixa és a sor- és oszlopműveletek:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1+S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{O_1+O_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_3-S_1]{S_2-\frac{1}{2}S_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[O_3-O_1]{O_2-\frac{1}{2}O_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow 2\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2 - 2\zeta^2.$

P Küszöböljük ki a vegyes tagokat a $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ kvadratikus alakban.

M Mivel a mátrixszorzás asszociatív, elvégezhetjük előbb az összes sorműveletet, majd csak utána az oszlopműveleteket, azaz az

$S_2 - 2S_1, \quad O_2 - 2O_1, \quad S_3 - S_1, \quad O_3 - O_1, \quad S_3 + 2S_2, \quad O_3 + 2O_2$

sorrend helyett

$S_2 - 2S_1, \quad S_3 - S_1, \quad S_3 + 2S_2, \quad O_2 - 2O_1, \quad O_3 - O_1, \quad O_3 + 2O_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3 - S_1]{S_2 - 2S_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 + 2S_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{O_2 - 2O_1 \\ O_3 - O_1 \\ O_3 + 2O_2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \xi^2 + \eta^2 + 3\zeta^2$$

- Az elemi oszlopműveletek mátrixaiból megkapható az áttérés $\mathbf{C}$ mátrixa is.
- $\mathbf{C}$ az $O_2 - 2O_1$, $O_3 - O_1$, $O_3 + 2O_2$ oszlopműveleteknek megfelelő elemi mátrixok szorzata, mely elemi oszlopműveletekkel is számolható:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Tehát

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kvadratikus alakok

Kúpszeletek ábrázolása

Homogén másodrendű görbe ábrázolása

P Ábrázoljuk a $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 1$ egyenletű görbét!

M A kvadratikus alak mátrixa

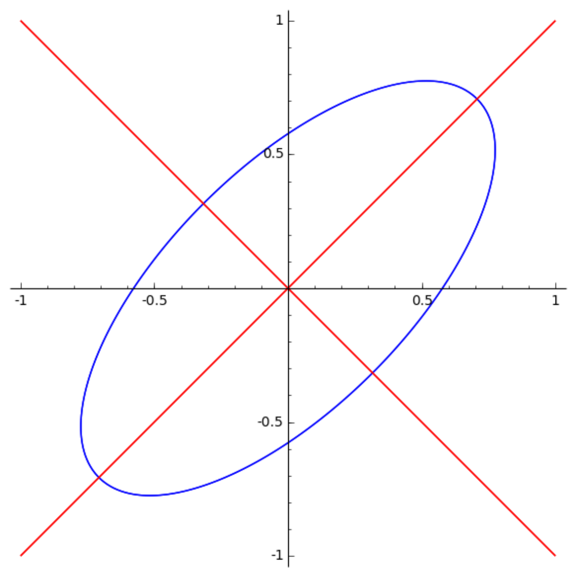
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

- $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$, sajátpárok: $(5, (-1, 1))$, $(1, (1, 1))$
- **Q**-t 1-determinánsúnak választva

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ helyettesítés után $5y_1^2 + y_2^2 = 1$, azaz

$$\frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + y_2^2 = 1$$


1
0.5
-1
-0.5
0.5
1
-0.5
-1

Másodrendű görbe centrális helyzetbe hozása

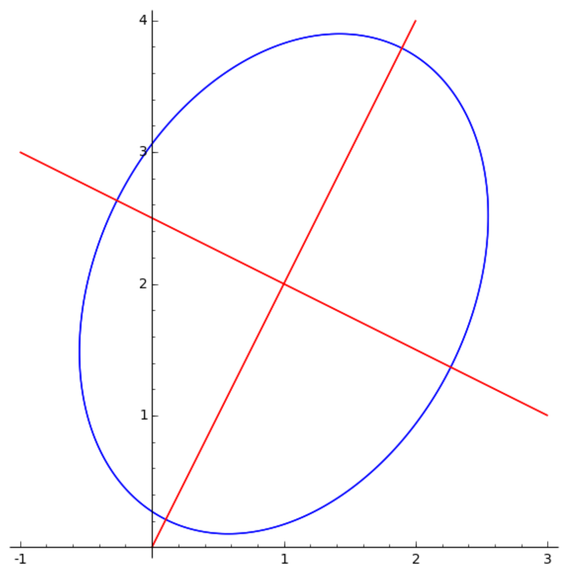
P Ábrázoljuk a $9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 10x_1 - 20x_2 + 5 = 0)$ egyenletű másodrendű görbét, centrumát, tengelyeit!

M Az $\mathbf{A}$ sajátfelbontásából $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} + C = \mathbf{y}^T\Lambda\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{y} + C$, ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, $\mathbf{B} = [-10 \ \ -20]$, $C = 5$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix},\ \Lambda = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},\ \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow 10y_1^2 + 5y_2^2 - 10\sqrt{5}y_2 + 5 = 0 \rightsquigarrow 10y_1^2 + 5(y_2^2 - 2\sqrt{5}y_2 + 5) = 20$

- $(z_1, z_2) = (y_1, y_2 - \sqrt{5})$ jelöléssel: $2z_1^2 + z_2^2 = 4$, azaz $\frac{z_1^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z_2^2}{2^2} = 1$
- A féltengelyek hossza $\sqrt{2}$ és 2, a középpont $(y_1, y_2) = (0, \sqrt{5})$, azaz $(x_1, x_2) = \mathbf{Q}(0, \sqrt{5}) = (1, 2)$,
- a tengelyek iránytangense 2 és $-1/2$, egyenletük $y = 2x$, $x + 2y = 5$.


4
3
2
1
-1
1
2
3

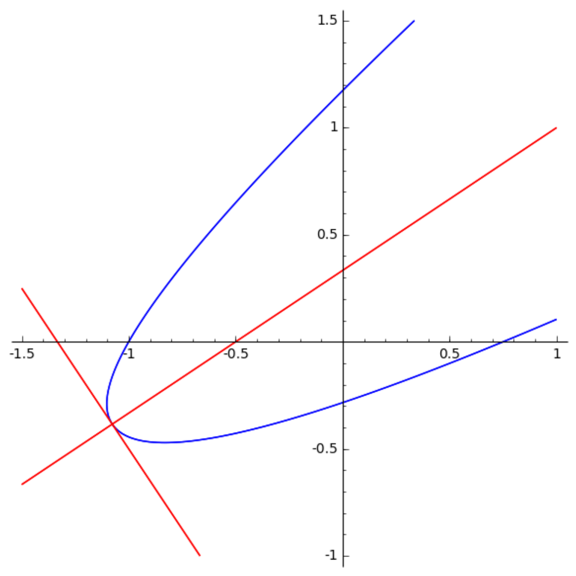
P Ábrázoljuk a $4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2 + x_1 - 8x_2 = 3$ egyenletű görbét!

M Az $\mathbf{A}$ sajátfelbontásából $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} + C = \mathbf{y}^T\Lambda\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{y} + C$, ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, $\mathbf{B} = [1 \ \ -8]$, $C = -3$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix},\ \Lambda = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix},$$

$\leadsto 13y_1^2 + 2\sqrt{13}y_1 - \sqrt{13}y_2 - 3 = 0 \leadsto (\sqrt{13}y_1 + 1)^2 = \sqrt{13}y_2 + 4$

- $(z_1, z_2) = (\sqrt{13}y_1 + 1, \sqrt{13}y_2 + 4)$ jelöléssel: $z_1^2 = z_2$.
- A parabola csúcspontja $(y_1, y_2) = (-1/\sqrt{13}, -4/\sqrt{13})$, azaz $(x_1, x_2) = \mathbf{Q}(-1/\sqrt{13}, -4/\sqrt{13}) = (-14/13, -5/13)$,
- a tengelyek egyenlete $y + \frac{5}{13} = -\frac{3}{2}(x + \frac{14}{13})$, $y + \frac{5}{13} = \frac{2}{3}(x + \frac{14}{13})$.



1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0.5
1

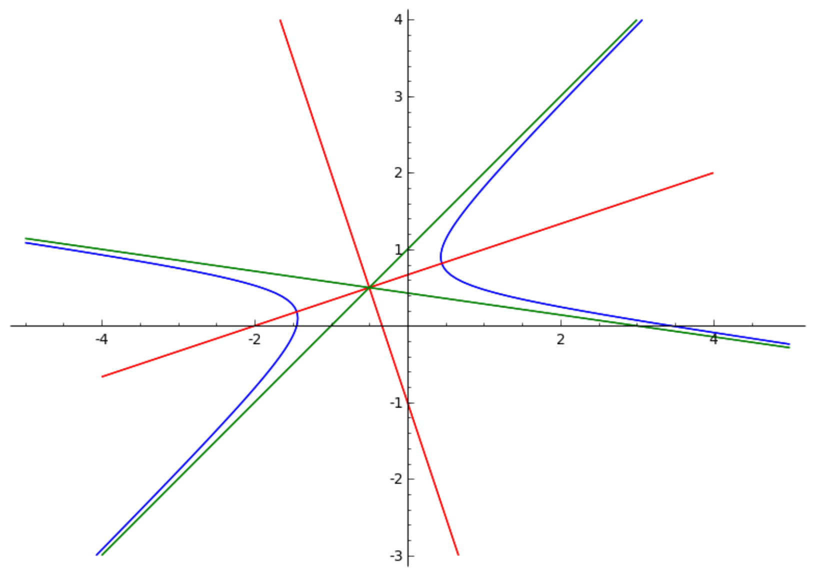
P Ábrázoljuk a $x_1^2 + 6x_1x_2 - 7x_2^2 - 2x_1 + 10x_2 - 5 = 0$ egyenletű másodrendű görbét, centrumát, tengelyeit, aszimptotáit!

M Az $\mathbf{A}$ sajátfelbontásából $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} + C = \mathbf{y}^T\Lambda\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{y} + C$, ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, $\mathbf{B} = [-2\ 10]$, $C = -5$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix},\ \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix},\ \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$2y_1^2 - 8y_2^2 + \frac{4}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{32}{\sqrt{10}}y_2 - 5 = 0 \rightsquigarrow 2(y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}})^2 - 8(y_2 - \frac{2}{\sqrt{10}})^2 = 2$

- $(z_1, z_2) = (y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}, y_2 - \frac{2}{\sqrt{10}})$: $z_1^2 - 4z_2^2 = 1$, azaz $z_1^2 - \frac{z_2^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1$
- A féltengelyek hossza 1 és $\frac{1}{2}$, a középpont $(x_1, x_2) = \mathbf{Q}(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,
- a tengelyek iránytangense $\frac{1}{3}$ és -3, egyenletük $(y - \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}(x + \frac{1}{2})$, $(y - \frac{1}{2}) = -3(x + \frac{1}{2})$,
- az aszimptoták iránytangensei leolvashatók az eredeti egyenletből: $y = x + 1$ $(y - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2})$ és $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{7}(x + \frac{1}{2})$.



4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-2
2
4

Kúpszeletek kanonikus alakja

kör	$x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$
ellipszis	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$
hiperbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ $(a > 0, b > 0)$
parabola	$y = cx^2$ vagy $x = cy^2$, $c \neq 0$
metsző egyenespár	$y^2 - (cx)^2 = 0$, $c \neq 0$
párhuzamos egyenespár	$x^2 = c$, $y^2 = c$, $c \geqslant 0$
egyenes	$y = c$, $x = c$
pont	$x^2 + y^2 = 0$

ahol r a kör sugara, a és b a féltengelyek hossza.

Kúpszeletek osztályozása a kvadratikus rész szerint

- A másodfokú kétismeretlenes $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}_{2\times 2}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{1\times 2}\mathbf{x} + C = 0$ polinom (ahol $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$) kanonikus alakja

  $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = c$ ahol λ_1, λ_2 az $\mathbf{A}$ nemnulla sajátértékei,
  $z_1^2 = az_2$ vagy $z_2^2 = az_1$ ha az egyik sajátérték 0,
  $z_1 = az_2$ vagy $z_2 = 0$ ha mindkét sajátérték 0.
- A sajátérték előjele szerint:

sajátérték	kúpszelet (elfajuló)
$+,+$ vagy $-,-$	ellipszis (vagy egy pont, vagy $\emptyset$)
$+,-$	hiperbola (vagy metsző egyenespár)
$\pm, 0$	parabola (2 párhuzamos egyenes, vagy $\emptyset$)
$0, 0$	(egyenes, sík, $\emptyset$)

m A kúpszelet típusának megállapításához nincs szükség *ortogonális* transzformációra, azaz ONB-ra. A teljes négyzetté alakítás egy gyorsabb módszer. Tekintsük a korábbi feladatokat:

P $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 1 \rightsquigarrow 9x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2 = 3 \rightsquigarrow$ $(3x_1 - 2x_2)^2 + 5x_2^2 = 3 \rightsquigarrow$ a $y_1 = 3x_1 - 2x_2$, $y_2 = \sqrt{5}x_2$ lineáris helyettesítéssel $y_1^2 + y_2^2 = 3$, ami ellipszis (nem kör!).

P $9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 10x_1 - 20x_2 + 5 = 0 \rightsquigarrow$ $(3x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{3})^2 + \frac{2}{9}(5x_2 - 10)^2 = 20 \rightsquigarrow y_1 = 3x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{3}$, $y_2 = 5x_2 - 10$ transzformáció (egy lineáris leképezés és egy eltolás kompozíciója) után: $y_1^2 + \frac{2}{9}y_2^2 = 20$, ami ellipszis.

P $4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2 + x_1 - 8x_2 = 3 \rightsquigarrow (2x_1 - 3x_2)^2 + x_1 - 8x_2 = 3 \rightsquigarrow$ $y_1 = 2x_1 - 3x_2$, $y_2 = -x_1 + 8x_2$ lineáris leképezés után $y_1^2 - 3 = y_2$, parabola.

P $x_1^2 + 6x_1x_2 - 7x_2^2 - 2x_1 + 10x_2 - 5 = 0 \rightsquigarrow$ $(x_1 + 3x_2 - 1)^2 - 4(2x2 - 1)^2 = 2 \rightsquigarrow y_1^2 - 4y_2^2 = 2$ hiperbola.

Kvadratikus alakok

Kvadratikus alakok jellege

Kvadratikus alakok és mátrixok definitsége

D Amh az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alak

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén.

Amh f

- indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus alak az.

Példák definit és indefinit kvadratikus alakokra

P $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, $g(x, y) = x^2 - 2y^2$, $h(x, y) = -x^2 - 2y^2$, $k(x, y, z) = x^2 + 2y^2$

M f pozitív definit, hisz az $(x, y) \neq (0, 0)$ esetén értéke mindig pozitív, g indefinit, h negatív definit, és k pozitív szemidefinit, hisz értéke $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ esetén is lehet 0 (ha $x = y = 0$, de $z \neq 0$)

m Ha A negatív definit, akkor $-\mathsf{A}$ pozitív definit. Hasonló állítás igaz a szemidefiniségre is.

m Ha $\mathsf{A} = [a]$, akkor A pontosan akkor pozitív definit, ha $a > 0$.

m I pozitív definit, ugyanis $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathsf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2 > 0$, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Á Tetszőleges A valós mátrix esetén $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ pozitív szemidefinit, és pontosan akkor pozitív definit, ha A teljes oszloprangú.

B $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathbf{x} = (\mathsf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}(\mathsf{A}\mathbf{x}) = |\mathsf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.

\- Mivel $\mathcal{O}(\mathsf{A}) = \mathcal{O}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})$, ezért $\mathrm{r}(\mathsf{A}) = \mathrm{r}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})$.

Definitség meghatározása a sajátértékekből

T A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alak pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nemnegatív;
- negatív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke negatív;
- negatív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nempozitív;
- indefinit, ha $\mathbf{A}$-nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

P Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrixok jellegét (definitségének típusát)!

M Az **A** mátrix sajátértékei 1, 1 és 4 $\rightsquigarrow$ pozitív definit:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \xi^2 + \eta^2 + 4\zeta^2$$

- **B** sajátértékei -1, -1 és 2, a főtengely-transzformáció utáni alak $-\xi^2 - \eta^2 + 2\zeta^2 \rightsquigarrow$ indefinit (pl. $(1, 0, 0)$-ban negatív, a $(0, 0, 1)$-ben pozitív).
- **C** sajátértékei -3, -3 és 0, így a főtengely-transzformáció utáni alak $-3\xi^2 - 3\eta^2 + 0\zeta^2 = -3\xi^2 - 3\eta^2 \rightsquigarrow$ negatív szemidefinit ($(0, 0, 1)$-ben 0, pozitív értéket nem vesz fel).

Definitség meghatározása valamely diagonalizált alakból

T L! a $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alak mátrixa kongruens a diagonális $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ mátrixszal, azaz valamely $\mathbf{C}$ invertálható mátrixra $\mathbf{D} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C}$. Ekkor az $\mathbf{A}$ mátrix, illetve a q kvadratikus alak pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\forall i : d_i > 0$;
- pozitív szemidefinit, ha $\forall i : d_i \geqslant 0$;
- negatív definit, ha $\forall i : d_i < 0$;
- negatív szemidefinit, ha $\forall i : d_i \leqslant 0$;
- indefinit, ha $\exists i, j : d_i > 0, d_j < 0$.

P $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = (\sqrt{3}x_1 - \frac{2}{\sqrt{3}}x_2)^2 + \frac{5}{3}x_2^2 = y_1^2 + \frac{5}{3}y_2^2$, $1 > 0$, $\frac{5}{3} > 0 \rightsquigarrow$ pozitív definit.

P A $2xy + 2xz + 2yz$ kvadratikus alakot diagonalizáltuk a 10. (és a 27.) oldalon: $2\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2 - 2\zeta^2$ $(-\xi^2 - \eta^2 + 2\zeta^2)$: indefinit!

Pozitív szemidefinit mátrixok faktorizációja

T L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus. A köv. ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit,
2. $\exists$ pozitív szemidefinit $\mathbf{B}$, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$.
3. $\exists$ $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$.

A $\mathbf{B}$ mátrix egyértelmű, vagyis egy pozitív szemidefinit mátrixnak egyetlen négyzetgyöke van a pozitív szemidefinit mátrixok közt.

B (1. $\Rightarrow$ 2.) $\mathbf{A}$ szimmetrikus $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit $\rightsquigarrow$ minden sajátértéke $\geqslant 0$ $\rightsquigarrow$ Λ főátlóbeli elemeiből négyzetgyököt lehet vonni $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{Q}(\Lambda^{\frac{1}{2}})\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{B}\mathbf{B}$, ahol $\Lambda^{\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$.

- (2. $\Rightarrow$ 3.) $\mathbf{C} = \mathbf{B}$ vagy $\mathbf{C} = \Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ megfelel (ui. $\mathbf{A} = \mathbf{Q}(\Lambda^{\frac{1}{2}})^\mathsf{T}\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$).

- (3. $\Rightarrow$ 1.) korábban láttuk

B $\mathbf{B}$ egyértelműsége: L! $\mathbf{B}$ pozitív szd., $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$. $\mathbf{B}$ ort.diag.-ható: $\mathbf{q}_i$ ONB, s.é. $\beta_i \geqslant 0 \rightsquigarrow \mathbf{B}\mathbf{q}_i = \beta_i \mathbf{q}_i \rightsquigarrow \mathbf{A}\mathbf{q}_i = \beta_i^2 \mathbf{q}_i \rightsquigarrow \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ hatása a $\mathbf{q}_i$ bázisvektorokon egyértelműen megadja az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}\mathbf{x}$ hatását is, így annak mátrixát is.

P Van-e olyan $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrix, melyre $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$?

M Sajátértékek: 25, 0, a sajátvektorok mátrixa $\mathbf{Q} = \frac{1}{5}\left[\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{smallmatrix}\right]$, így a sajátfelbontás:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \Lambda^{1/2}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\Lambda^{1/2}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C} = \mathbf{B}$ is jó.

P Van-e olyan $\mathbf{C}$ mátrix, melyre $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

M $\mathbf{A}$ szimmetrikus, sajátértékei 9, 9, 0, tehát ilyen $\mathbf{C}$ mátrix létezik.

\- $\mathbf{A}$ sajátfelbontása és a $\mathbf{C}$ mátrix:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pozitív definit mátrixok faktorizációja

T L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus. A következők ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}$ pozitív definit,
2. az $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ LU-felbontásban $\mathbf{U}$ minden főátlóbeli eleme pozitív,
3. van olyan valós $\mathbf{R}$ felsőháromszög-mátrix, melynek minden főátlóbeli eleme pozitív, és $\mathbf{A} = \mathbf{R}^{\top}\mathbf{R}$.
4. van olyan invertálható valós $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{\top}\mathbf{C}$,

A 3. pont szerinti $\mathbf{R}$ egyértelmű!

D Az $\mathbf{A} = \mathbf{R}^{\top}\mathbf{R}$ felbontást az $\mathbf{A}$ mátrix Cholesky-felbontásának nevezzük.

B 1. $\Rightarrow$ 2. $\mathbf{A}$ pozitít definit $\rightsquigarrow$ invertálható $\rightsquigarrow$ LU-felbontása egyértelmű: $\mathbf{A} = \mathbf{LU} \rightsquigarrow \mathbf{e}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^\top \mathbf{LU} \mathbf{e}_i = u_{ii} > 0$,

- 2. $\Rightarrow$ 3.

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/u_{11} & \dots & u_{1n}/u_{11} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n}/u_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\hat{\mathbf{U}}$, ahol $\mathbf{L}$ alsó, $\hat{\mathbf{U}}$ felső egységháromszög-mátrix
$\mathbf{A}^\top = \mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{L}(\mathbf{D}\hat{\mathbf{U}}) = \hat{\mathbf{U}}^\top(\mathbf{D}\mathbf{L}^\top)$ LU-felbontások $\rightsquigarrow \mathbf{L} = \hat{\mathbf{U}}^\top \rightsquigarrow$
$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^\top \rightsquigarrow \mathbf{R} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{L}^\top$ jelöléssel $\mathbf{A} = \mathbf{R}^\top\mathbf{R}$.

- E felbontás egyértelmű.
- 3. $\Rightarrow$ 4. $\forall i : [\mathbf{R}]_{ii} > 0 \rightsquigarrow \mathbf{R}$ invertálható, így $\mathbf{C} = \mathbf{R}$ megfelel.
- 4. $\Rightarrow$ 1. $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\top\mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{A}$ pozitív szemidefinit.

$\mathbf{C}$ invertálható $\rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{C}^\top\mathbf{C}$ is $\rightsquigarrow \mathbf{A}$-nak 0 nem sajátértéke $\rightsquigarrow \mathbf{A}$ pozitív definit.

P Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix Cholesky-felbontását, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

B $\mathbf{A}$ mátrix pozitív definit, mert $\chi(x) = -x^3 + 8x^2 - 12x + 4$,
$\chi(0) = 4 > 0$, $\chi(1) = -1 < 0$, $\chi(2) = 4 > 0 \rightsquigarrow$ minden gyöke > 0.

- Az LU-felbontás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\operatorname{diag}(1,4,1) = \operatorname{diag}(1,2,1)\operatorname{diag}(1,2,1)$ és az $\mathbf{R} = \operatorname{diag}(1,2,1)\mathbf{L}^\top \rightsquigarrow$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kvadratikus alakok

Definitség és főminorok

Főminorok

D A mátrixból kiválasztható aldeterminánsokat minoroknak is nevezik. Ha azonos sor- és oxlopindexekhez tartozik, azaz szimmetrikusan elhelyezkedő részmátrix determinánsa, akkor szimmetrikus minornak, ha az első k sorhoz és oszlophoz tartozik sarokaldeterminánsnak vagy főminornak nevezzük.

m Ha egy mátrix diagonális alakú és pozitív definit, azaz minden sajátértéke pozitív, akkor minden szimmetrikus minora is pozitív, ha pozitív szemidefinit, akkor minden szimmetrikus minora nemnegatív. Ha e diagonális mátrix minden sajátértéke negatív, akkor főminorai felváltva $- + - + - + \dots$ előjelűek.

Á A főminorok nem változnak, ha a szimultán sor- és oszlopműveletek közül csak a hozzáadást végezzük és azt is csak lefelé és jobbra: $S_i + cS_j$ és $O_i + cO_j$, ahol $i > j$.

Szimmetrikus minorok a karakterisztikus polinomban**

T L! **A** karakterisztikus polinomja $\chi(\lambda)$, sajátértékei λ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), és jelölje $e_k = e_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ a sajátértékek k-adik elemi szimmetrikus polinomját. Ekkor

$$\chi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} e_k \lambda^{n-k}$$

ahol e_k megegyezik az **A** összes k-adik szimmetrikus minorának összegével.

B egyrészt $\chi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda) \rightsquigarrow$

$$\chi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} e_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)(-\lambda)^{n-k}$$

- másrészt $\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, ezt a belőle kiválasztható kígyók determinánsainak összegére bontjuk, majd tovább bontjuk az $a_{ii} - \lambda$ alakú összegek felbontásával. Pl.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

- A főátlójában $-\lambda$-kat tartalmazó determinánsokat két sz.minor szorzatára bontjuk, az egyik $(-\lambda)^{n-k}$, a másik a $-\lambda$-kat tartalmazó sorok és oszlopok elhagyásával keletkezett sz.minor. Pl.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{42} & 0 \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 0 & a_{24} \\ a_{42} & 0 \end{vmatrix}$$

  a $-\lambda$-kat tartalmazó sorok és oszlopok bal felső sarokba hozása mindig azonos számú sor- és oszlopcserével valósítható meg, így előjele nem változik.
- Tehát $(-\lambda)^{n-k}$ együtthatója = az $\mathbf{A}$ mátrixból kiválasztható összes k-adrendű szimmetrikus minorok összege.

Definitség és főminorok

T A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alak pontosan akkor

1. pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden főminora pozitív;
2. pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden szimmetrikus minora pozitív;
3. negatív definit, ha $\mathbf{A}$ minden páratlan rendű főminora negatív, páros rendű főminora pozitív;
4. pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden szimmetrikus minora nemnegatív.

B 1. $(\Rightarrow)$ $(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ vektorokkal ✓

$(\Leftarrow)$ $\mathbf{A}$ pozitív definit $\rightsquigarrow$ LU-felbontásában $u_{ii} > 0$ $(i = 1, \dots, n)$

J! $\mathbf{A}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ mátrix első k sorának és első k oszlopának kereszteződésében álló részmátrixot $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{L}_k$, illetve $\mathbf{U}_k$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_k & \mathbf{O} \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_k & * \\ \mathbf{O} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_k\mathbf{U}_k & * \\ * & * \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow \mathbf{A}_k = \mathbf{L}_k\mathbf{U}_k$

$\rightsquigarrow$ a k-adik főminor $|\mathbf{A}_k| = |\mathbf{L}_k||\mathbf{U}_k| = u_{11}u_{22}\dots u_{kk} > 0$.

- $\det(\mathbf{A}_k) > 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ $\rightsquigarrow u_{kk} = \det(\mathbf{A}_k)/\det(\mathbf{A}_{k-1}) > 0 \rightsquigarrow \mathbf{A}$ pozitív definit.
- 2. L! $\mathbf{P}$ egy olyan permutáló mátrix, melyre $\mathbf{PAP}^T$ az $\mathbf{A}$ egy adott szimmetrikus minorát főminorba viszi.

  $\mathbf{A}$-nak pontosan akkor pozitív minden szimmetrikus minora, ha minden főminora az.

- 3. Ha $\mathbf{A}$ negatív definit, akkor $-\mathbf{A}$ pozitív definit, így az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ felbontásban minden i-re $u_{ii} < 0$, ami igazolja az állítást.
- 4.* Ha az $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, az $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ sor- és oszlopindexekhez tartozó $\mathbf{B}$ részmátrix is pozitív szemidefinit, hisz bármely $\hat{\mathbf{x}}^\mathsf{T}\mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}$ szorzatban $\hat{\mathbf{x}}$ kiegészíthető nullákkal úgy, hogy $[\hat{\mathbf{x}}]_j = [\mathbf{x}]_{i_j}$ legyen, így $\hat{\mathbf{x}}^\mathsf{T}\mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant 0$.
- Tfh $\mathbf{A}$ minden sz. minora nemnegatív. Megmutatjuk, hogy ekkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén $\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I}$ pozitív definit, mert sarokaldeterminánsai pozitívak.

  Így $\mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I})\mathbf{x} > 0$ minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra, amiből

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant 0.$$

- L! $\mathbf{A}_k$ a bal felső $k \times k$-as részmátrix, sajátértékeit jelölje $\lambda_1,\dots, \lambda_k$.
  $\rightsquigarrow \mathbf{A}_k + \varepsilon\mathbf{I}_k$ sajátértékei $\lambda_1 + \varepsilon,\dots, \lambda_k + \varepsilon$
  $\rightsquigarrow \varepsilon > 0$ esetén $\det(\mathbf{A}_k + \varepsilon\mathbf{I}_k) = (\lambda_1 + \varepsilon) \dots (\lambda_k + \varepsilon) = \varepsilon^n + e_1\varepsilon^{n-1} + \dots + e_{n-1}\varepsilon + e_n > 0$
  (ahol e_j az $\lambda_1,\dots, \lambda_k$ j-edik elemi szimmetrikus függvénye)
- ugyanis $e_j =$ az $\mathbf{A}_k$ j-edrendű sz. minorainak összegével, amelyek viszont mind nemnegatívak, mivel $\mathbf{A}$-nak is sz. minorai, másrészt $\varepsilon^n > 0$
- Tehát $\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I}$ minden főminora pozitív, így $\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I}$ pozitív definit.

Bilineáris függvények

Bilineáris függvények

D Legyen $\mathcal{V}$ egy $\mathbb{F}$ test fölötti vektortér. A $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$ függvényt bilineáris függvénynek nevezzük, ha bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ és $c \in \mathbb{F}$ esetén

1. $b(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w})$,
2. $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w})$,
3. $b(c\mathbf{v}, \mathbf{w}) = b(\mathbf{v}, c\mathbf{w}) = cb(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

m b lineáris az első változóban, a második rögzítése mellett és lineáris a második változóban, az első rögzítése mellett.

P
1. $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{y}$, ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$,
2. skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$,
3. $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$, ahol $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

Komplex bilineáris (szeszkvilineáris) függvények

D Legyen $\mathcal{V}$ egy $\mathbb{C}$ fölötti vektortér. A $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ függvényt komplex bilineáris függvénynek vagy szeszkvilineáris függvénynek nevezzük, ha bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ és $c \in \mathbb{C}$ esetén

1. $b(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w})$,
2. $b(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w})$,
3. $b(c\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \bar{c}b(\mathbf{v}, \mathbf{w})$,
4. $b(\mathbf{v}, c\mathbf{w}) = cb(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

m b „konjugált lineáris” az első változóban, a második rögzítése mellett és lineáris a második változóban, az első rögzítése mellett.

P
1. $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{B}\mathbf{y}$, ahol $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$,
2. skaláris szorzás $\mathbb{C}^n$-ben: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$,

Bilineáris függvény mátrixa

D Legyen a $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér egy bázisa $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$. A $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$ (komplex) bilineáris függvény $\mathcal{C}$ bázisra vonatkozó mátrixán, vagy Gram-mátrixán azt a $\mathbf{B}$ mátrixot értjük, melyre

$$[\mathbf{B}]_{ij} = b(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j).$$

P Írjuk fel az $\mathbb{R}^2$-beli standard skaláris szorzás – mint bilineáris függvény – mátrixát a standard és a $\mathcal{C} = \{(1, 1), (2, -1)\}$ bázisokra vonatkozóan!

M A standard bázisra vonatkozóan: $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, így $b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, tehát a Gram-mátrixa $\mathbf{I}$.

- A $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozóan

$$\mathbf{B} = [b(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j)]_{ij} = [\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j]_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bilineáris függvény mátrixa

T Legyen $\mathcal{V}$ egy $\mathbb{F}$ fölötti vektortér, $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ egy bázisa, egy $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ vektor $\mathcal{C}$ bázisra vonatkozó koordinátás alakját jelölje $\mathbf{x}_\mathcal{C}$. Ha $\mathbf{B}$ a $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$ bilineáris függvény mátrixa a $\mathcal{C}$ bázisra vonatkozóan, akkor $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_\mathcal{C}^\mathsf{T} \mathbf{B} \mathbf{y}_\mathcal{C}$ (komplex esetben $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_\mathcal{C}^\mathsf{H} \mathbf{B} \mathbf{y}_\mathcal{C}$).

K A $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$ bilineáris függvényhez annak $\mathcal{C}$ bázisra vonatkozó Gram-mátrixát rendelő $b \to \mathbf{B}$ leképezés bijekció a bilineáris függvények és az $\mathbb{F}^{n \times n}$ között, ahol

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_\mathcal{C}^\mathsf{T} \mathbf{B} \mathbf{y}_\mathcal{C}.$$

m A tétel hasonlóan szól komplex bilineáris függvényekre is annyi különbséggel, hogy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ és $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_\mathcal{C}^\mathsf{H} \mathbf{B} \mathbf{y}_\mathcal{C}$.

B Legyen $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{c}_i$, $\mathbf{y} = \sum_j y_j \mathbf{c}_j \rightsquigarrow$

$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b(\sum_i x_i \mathbf{c}_i, \sum_j y_j \mathbf{c}_j) = \sum_{i,j} x_i y_j b(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = \sum_{i,j} x_i y_j b_{ij} =$

$\sum_i x_i \left(\sum_j b_{ij} y_j \right) = \mathbf{x}_{\mathcal{C}}^{\mathsf{T}} \mathbf{B} \mathbf{y}_{\mathcal{C}}$

- Fordítva: legyen $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ egy tetszőleges mátrix, és legyen $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_{\mathcal{C}}^{\mathsf{T}} \mathbf{B} \mathbf{y}_{\mathcal{C}}$

  E függvény bilineáris (ellenőrizzük!),

  másrészt e b függvény mátrixa épp $\mathbf{B}$, ugyanis

$$b_{ij} = b(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{B}]_{ij}.$$

Bilineáris függvény mátrixa báziscsere után

Á Legyen M a $\mathcal{B}$-ről $\mathcal{C}$-re való áttérés mátrixa, azaz $\mathsf{x}_\mathcal{C} = \mathsf{M}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{x}_\mathcal{B}$, $\mathsf{y}_\mathcal{C} = \mathsf{M}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{y}_\mathcal{B}$. Ekkor

$$b(\mathsf{x},\mathsf{y}) = \mathsf{x}_\mathcal{C}^\top \mathsf{B}\mathsf{y}_\mathcal{C} = \mathsf{x}_\mathcal{B}^\top \mathsf{M}^\top \mathsf{B}\mathsf{M}\mathsf{y}_\mathcal{B}$$

Á $\mathsf{A} \cong \mathsf{B} \iff$ van olyan bilineáris függvény, melynek a két mátrix a Gram-mátrixa két bázisban.

m Míg a lineáris leképezés mátrixa báziscsere esetén hasonló mátrixra változik, addig bilineáris függvény mátrixa egy vele kongruensre.

m Komplex bilineáris függvény esetén $\mathsf{A} = \mathsf{M}^\mathsf{H}\mathsf{B}\mathsf{M}$.

Speciális bilineáris függvények

D $\mathcal{V}$ $\mathbb{F}$ fölötti vektortér, $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$

1. szimmetrikus, ha bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vektorra $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
2. ferdén szimmetrikus vagy szimplektikus, ha bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vektorra $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -b(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
3. alternáló, ha bármely $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ vektorra $b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$.

$\mathcal{V}$ komplex vektortér, $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$

4. Hermite-féle (önadjungált, ermitikus), ha bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vektorra $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{b(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$.

Á Minden alternáló bilineáris függvény szimplektikus, ugyanis $0 = b(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{y})$, amiből $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -b(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

m 2-karakterisztika esetén: szimplektikus = szimmetrikus ($-1 = 1$).

Á Nem 2-karakterisztikájú testekben: ha b szimplektikus, akkor alternáló. ✓

P
1. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ esetén $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ szimmetrikus bilineáris függvény,
2. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ esetén $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ Hermite-féle bilineáris függvény,
3. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ esetén $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ alternáló bilineáris függvény.

T
1. Egy bilineáris $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor szimmetrikus, ha mátrixa szimmetrikus (bármely bázisban),
2. pontosan akkor alternáló, ha mátrixa ferdén szimmetrikus,
3. egy komplex bilineáris $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor Hermite-féle (ermitikus), ha mátrixa önadjungált.

B (⇒) b szimmetrikus $\rightsquigarrow b(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = b(\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_i) \rightsquigarrow b_{ij} = b_{ji} \rightsquigarrow \mathbf{B}$ szimmetrikus

\- (⇐) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [b(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^\mathsf{T} = \left(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{y}\right)^\mathsf{T} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{x} = b(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

m A többi állítás bizonyítása hasonló.

Szimmetrikus bilineáris alak diagonalizálhatósága

T (Főtengelytétel bilineáris függvényekre) Egy b bilineáris függvény pontosan akkor diagonalizálható, ha szimmetrikus!

B Ha b diagonalizálható, azaz valamely bázisban diagonális a mátrixa, akkor szimmetrikus, hisz diagonális mátrix szimmetrikus!

- Ha b szimmetrikus, akkor a $\mathbf{B}$ Gram-mátrixa is az

$\rightsquigarrow$ $\exists$ $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{Q}^\top\mathbf{B}\mathbf{Q}$ diagonális.

$\rightsquigarrow$ $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}_{\mathcal{Q}}^\top\mathbf{Q}^\top\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{y}_{\mathcal{Q}} = \sum_i \lambda_i x_i y_i$, ahol a λ_i értékek $\mathbf{B}$ sajátértékei.

Á Ha a b bilineáris függvény diagonalizálható, akkor diagonalizálható úgy is, hogy mátrixának főátlójában csak ± 1-esek és 0-k állnak!

B Legyen Λ a b egy mátrixának diagonalizálásából származó diagonális mátrixa. Legyen

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } \lambda_i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \text{ha } \lambda_i \neq 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ A $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ mátrixszal $\mathbf{D}^\top \Lambda \mathbf{D}$ diagonális és minden diagonális eleme ± 1 vagy 0, másrészt kongruens Λ-val.

$\mathbf{D}^\top \Lambda \mathbf{D}$-ben az i-edik főátlóbeli elem $\operatorname{sgn}(\lambda_i)$

P $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 3(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$.
Hozzuk diagonális alakra!

M A standard bázisban $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

E mátrix sajátértékei 2, 2, 5 (korábban meghatároztuk a sajátvektorokból álló $\mathbf{Q}$ mátrixot is)

$\mathbf{Q}$ a $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{Q}$ áttérés mátrixa, $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ koordinátás alakja a $\mathcal{Q}$ bázisban $\mathbf{x}_\mathcal{Q} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$, $\mathbf{y}_\mathcal{Q} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3)$ (tehát $\mathbf{x}_\mathcal{Q} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{x}_\mathcal{E}$).

$\rightsquigarrow$ $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2\tilde{x}_1\tilde{y}_1 + 2\tilde{x}_2\tilde{y}_2 + 5\tilde{x}_3\tilde{y}_3$

$\rightsquigarrow$ de van olyan bázis is, melyben $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \tilde{x}_1\tilde{y}_1 + \tilde{x}_2\tilde{y}_2 + \tilde{x}_3\tilde{y}_3$

Sylvester-féle tehetetlenségi tétel

D A b szimmetrikus bilineáris függvény valamely **D** diagonális mátrixában jelölje n_+ a pozitív előjelű, n_- a negatív előjelű és n_0 a zérus értékű diagonális elemek számát. A b szimmetrikus bilineáris függvény tehetetlenségén (inerciáján) vagy szignatúráján az (n_+, n_-, n_0) hármast értjük. Hasonlóan definiálható szimmetrikus mátrix tehetlensége.

K Értelmes-e ez a definíció?

T (Sylvester-féle tehetetlenségi tétel) Két valós szimmetrikus mátrix pontosan akkor kongruens, ha azonos a tehetetlenségük.

m Ez tehát azt jelenti, hogy mindegy, hogy b mátrixát melyik bázisban diagonalizáltuk, mindegyik mátrixhoz ugyanaz a (n_+, n_-, n_0) hármas tartozik, ez tehát a szimmetrikus bilineáris függvényt jellemzi!

B (⇐) A kongruencia tranzitív, így ha két mátrixnak azonos a tehetetlensége (azonos ±1-0 diagonális mátrixszal kongruensek), akkor egymással is.

\- (⇒) Indirekt: TFH ∃ két kongruens mátrix, melyeknek különböző a tehetetlenségük ($n_+ + n_- + n_0 = m_+ + m_- + m_0 = n$).

⇝ ∃ két különböző ±1-0 diagonális mátrix, melyek kongruensek, azaz ugyanannak a b bil. fv.-nek a mátrixai a $\mathcal{B}$, illetve $\mathcal{C}$ bázisban:

$$\begin{bmatrix} \mathsf{I}_{n_+} & \mathsf{O} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & -\mathsf{I}_{n_-} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \mathsf{O}_{n_0} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \cong \begin{bmatrix} \mathsf{I}_{m_+} & \mathsf{O} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & -\mathsf{I}_{m_-} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \mathsf{O}_{m_0} \end{bmatrix}_{\mathcal{C}},$$

⇝ $\forall \mathbf{x} \in \operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n_+})$ vektorra $b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$
$\forall \mathbf{y} \in \operatorname{span}(\mathbf{c}_{m_++1}, \dots, \mathbf{c}_n)$ vektorra $b(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leqslant 0$

\- Kongruens mátrixok rangja és nullitása megegyezik ⇝ $n_0 = m_0$.

\- TFH $n_+ > m_+ \rightsquigarrow m_- + m_0 > n_- + n_0 \rightsquigarrow n_+ + m_- + m_0 > n$

⇝ $\exists \mathbf{z} \in (\operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n_+}) \cap \operatorname{span}(\mathbf{c}_{m_++1}, \dots, \mathbf{c}_n))$, melyre $b(\mathbf{z}, \mathbf{z}) > 0$ és $b(\mathbf{z}, \mathbf{z}) \leqslant 0$ ↯

Bilineáris függvények

Kapcsolat a kvadratikus alakokkal

Polarizációs formulák

m Ha $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (komplex) bilineáris, akkor $q(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ kvadratikus alak.

L Ha b komplex bilin. fv. és q a hozzá tartozó kvadratikus alak, akkor fennáll a köv. polarizációs formula:

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{4}\left(q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - q(\mathbf{u}-\mathbf{v}) - \mathrm{i}q(\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}) + \mathrm{i}q(\mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v})\right)$$

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \frac{1}{4}\left(q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - q(\mathbf{u}-\mathbf{v}) + \mathrm{i}q(\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}) - \mathrm{i}q(\mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v})\right)$$

B Egyszerű kifejtés és behelyettesítés:

$$q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

$$q(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

$$q(\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) + \mathrm{i}b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathrm{i}b(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

$$q(\mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) - \mathrm{i}b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathrm{i}b(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

T 1. A fenti $b \mapsto q$ leképezés komplex bilineáris függvényekre bijektív.
2. Egy komplex bilineáris fv. pontosan akkor Hermite-féle, ha a hozzá tartozó kvadratikus alak valós értékű.
3. Valós bilineáris függvényekre $b \mapsto q$ a szimmetrikus bilineáris fv-ek és a kvadratikus alakok közt bijektív.

B 1. Az előző lemma szerint egy komplex bilineáris függvény kifejezhető a hozzá tartozó kvadratikus alak segítségével, tehát ha két kvadratikus alak megegyezik, akkor a hozzájuk tartozó bilineáris függvények is!
2. Az előző lemma eredményeit összevetve: ha q valós értékű, akkor $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{b(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$, azaz b Hermite-féle.
Ha b Hermite-féle, akkor $b(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \overline{b(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$, azaz $q(\mathbf{u}) = \overline{q(\mathbf{u})}$, tehát q valós értékű!

3. Valós esetben különböző bilineáris függvényekhez is tartozhat azonos kvadratikus alak:

- Az $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ és az $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixokhoz azonos kvadratikus alak tartozik: $q(x) = x^2 + 4xy + 3y^2$.
- Ha b alternáló, akkor $b(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, azaz $q(\mathbf{u}) = -q(\mathbf{u})$, azaz $q(\mathbf{u}) = 0$, tehát minden alternáló bilineáris függvényhez a zérus kvadratikus alak tartozik.

A valós polarizációs formula a szimmetrikus b bilineáris függvényre a $b(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) + 2b(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ képletből:

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left(q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - q(\mathbf{u}) - q(\mathbf{v})\right).$$

tehát ha két szimmetrikus bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak megegyezik, akkor a hozzájuk tartozó bilineáris függvények is!

Bilineáris függvények

Skaláris szorzás és ortogonalitás

A skaláris szorzás bilineáris/szeszkvilineáris

m A $\langle .,. \rangle : \mathcal{V}_\mathbb{R} \times \mathcal{V}_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ skaláris szorzás definíciója a bilineáris függvények fogalmát használva így fogalmazható meg:
L! $\mathcal{V}_\mathbb{R}$ vektortér. A kétváltozós $\langle .,. \rangle : \mathcal{V}_\mathbb{R} \times \mathcal{V}_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzás $\mathcal{V}_\mathbb{R}$-en, ha
- bilineáris,
- szimmetrikus, és
- a hozzá tartozó $\mathcal{V}_\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \mathsf{x} \mapsto \langle \mathsf{x}, \mathsf{x} \rangle$ kvadratikus alak pozitív definit.

m Hasonlóképp tekintsük a $\mathcal{V}_\mathbb{C}$ vektorteret. A $\langle .,. \rangle : \mathcal{V}_\mathbb{R} \times \mathcal{V}_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzás $\mathcal{V}_\mathbb{C}$-en, ha
- szeszkvilineáris,
- önadjungált, és
- a hozzá tartozó $\mathcal{V}_\mathbb{C} \to \mathbb{R}; \mathsf{x} \mapsto \langle \mathsf{x}, \mathsf{x} \rangle$ kvadratikus alak pozitív definit.

Ortogonalitás bilineáris függvényre nézve

m A skaláris szorzással definiált fogalmak közül a merőlegesség általánosítható bilineáris függvényekre is.

D L! $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$ bilineáris függvény. AMH az $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vektorok *b-ortogonálisak* (merőlegesek b-re nézve), ha $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Á ha b szimmetrikus/ermitikus vagy alternáló, akkor e reláció szimmetrikus, azaz ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ b-ortogonálisak, akkor $\mathbf{y}$ és $\mathbf{x}$ is ($b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff b(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$). (Igaz az állítás megfordítása is!)

D L! $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ és $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$ bilineáris függvény. A $\mathcal{W}$ altér *merőlegese és bal merőlegese b-re nézve*

$$\mathcal{W}_b^{\perp} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}\ b(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0\},$$
$${}^{\perp}\mathcal{W}_b = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}\ b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0\}.$$

Á Ha b szimmetrikus/ermitikus vagy alternáló, akkor $\mathcal{W}_b^{\perp} = {}^{\perp}\mathcal{W}_b$.

Á $\mathcal{W}_b^{\perp} \leqslant \mathcal{V}$, ${}^{\perp}\mathcal{W}_b \leqslant \mathcal{V}$.

P L! $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{W} = \operatorname{span}((0,1))$, b mátrixa $\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right]$, $\mathcal{W}_b^\perp =?$, ${}^\perp\mathcal{W}_b =?$

M $b((0,1),(x,y)) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = x \rightsquigarrow \mathcal{W}_b^\perp = \operatorname{span}((0,1)) = \mathcal{W}$

$b((x,y),(0,1)) = \begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = 0 \rightsquigarrow {}^\perp\mathcal{W}_b = \mathbb{R}^2$

m Mint látjuk, itt $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}_b^\perp$ tartalmazhat nemzérus vektorokat, és $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}_b^\perp > \dim \mathcal{V}$ is előfordulhat.

P L! $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\intercal A\mathbf{y}$, $\mathcal{W} = \operatorname{span}((1,1,0),(0,2,1))$,

$\mathcal{W}_b^\perp = ?$, ${}^\perp\mathcal{W}_b = ?$

M $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megoldása:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{x} = (-2,-1,1)t \rightsquigarrow$$

${}^\perp\mathcal{W}_b = \operatorname{span}((-2,-1,1))$

$\mathbf{x}^\intercal A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^\intercal \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ megoldása:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{x} = (-4,-1,2)t \rightsquigarrow$$

$\mathcal{W}_b^\perp = \operatorname{span}((-4,-1,2))$

Sylvester-féle tehetetlenségi tétel

m A tehetetlenségi tétel szimmetrikus helyett ermitikus bilineáris függvényekre és a *b*-ortogonalitás fogalmával is megfogalmazható.

T L! *b* valós szimmetrikus bilineáris vagy komplex ermitikus szeszkvilineáris függvény és *q* a hozzá tartozó kvadratikus alak. Ekkor tetszőleges *b*-ortogonális bázis elemei között ugyanannyin lesz *q* értéke pozitív, negatív, illetve 0.

Szeszkvilineáris függvény diagonalizálása

m A szimultán sor és oszlopműveletekkel komplex mátrixban is kiküszöbölhetők a vegyes tagok, de ott úgy kapjuk meg a $\mathbf{C}^H\mathbf{A}\mathbf{C}$ mátrixot, ha az $S_i + cS_j$ műveletnek az $O_i + \bar{c}O_j$ művelet felel meg.

P Tekintsük az önadjungált $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$ mátrixot!

a) Mi a $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^H\mathbf{A}\mathbf{y}$ fv értéke az $\mathbf{x} = (1, \mathrm{i}, 0)$, $\mathbf{y} = (0, 1, \mathrm{i})$ helyen?

b) Írjuk fel a b-hez tartozó q kvadratikus formát polinom alakban!

M *a)* $\mathbf{x}^H\mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = 2 - \mathrm{i}$

b) $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H\mathbf{A}\mathbf{x} =$

$|x_1|^2 + |x_2|^2 + (1+\mathrm{i})\bar{x}_1x_2 + (1-\mathrm{i})x_1\bar{x}_2 - \mathrm{i}\bar{x}_1x_3 + \mathrm{i}x_1\bar{x}_3 - \mathrm{i}\bar{x}_2x_3 + \mathrm{i}x_2\bar{x}_3$

P Az előző feladatbeli b függvényhez *a)* keressünk $\mathbb{C}$-ben egy b-ortogonális bázist és *b)* írjuk fel a b függvényt és a q kvadratikus alakot e bázisban! *c)* szimultán sor- és oszlopműveletekkel diagonalizáljuk a kvadratikus alakot!

M *a)* $\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda \rightsquigarrow \lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{v}_1 = (1, \frac{4}{5} - \frac{3}{5}\mathrm{i}, \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i})$, $\mathbf{v}_2 = (1, \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i})$, $\mathbf{v}_3 = (1, -1, -1) \rightsquigarrow$ így $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ b-ortogonális bázis.

b) a függvény $3\bar{x}_1 y_1 - \bar{x}_2 y_2$, a kvadratikus alak $3|x_1|^2 - |x_2|^2$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3 - \mathrm{i}S_1]{S_2 - (1-\mathrm{i})S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3 + \mathrm{i}S_1]{O_2 - (1+\mathrm{i})S_1}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[O_3 + O_2]{S_3 + S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b-ortogonális bázis keresése G–S-ortogonalizációval

P Keressünk b-ortogonális bázist a standard bázisból indulva az előző példabeli függvényhez:

$$b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^H\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}^H \begin{bmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

M A standard bázis nem b-ortogonális, pl. $b(\mathbf{i},\mathbf{j}) = 1 \neq 0$.

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{j} - \frac{\mathbf{b}_1^H\mathbf{A}\mathbf{j}}{\mathbf{b}_1^H\mathbf{A}\mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1-\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{k} - \frac{\mathbf{b}_1^H\mathbf{A}\mathbf{k}}{\mathbf{b}_1^H\mathbf{A}\mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{b}_2^H\mathbf{A}\mathbf{k}}{\mathbf{b}_2^H\mathbf{A}\mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$