



BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM



Bevezetés az algebraba 2

BMETE91AM37



Sajátérték, diagonalizálás

H607 - 2017-02-27



Wetttl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

Jó bázis választása

- P** Tükrözzük a 3-dimenziós tér vektorait a tér egy megadott síkjára! Válasszunk e lineáris leképezés leírásához egy megfelelő bázist, majd írjuk fel a tükrözés e bázisra vonatkozó mátrixát!
- M** A sík egy bázisa $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, a rá merőleges altér egy bázisa $\{\mathbf{c}\}$.
A T leképezés hatása e vektorokon: $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$ és $T\mathbf{c} = -\mathbf{c}$.

Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban T mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

E bázisban egy tetszőleges (x, y, z) vektor tükörképe $(x, y, -z)$.

Lineáris transzformációk sajátvektorai

D $L: \mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér, $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris transzformáció. Amh az $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor az L trafó **sajátvektora**, ha $L\mathbf{x} \parallel \mathbf{x}$, azaz ha van olyan $\lambda \in \mathbb{F}$ szám, melyre $L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Az ilyen λ számot az L lineáris transzformáció **sajátértékének** nevezzük.

m Ha \mathbf{x} sajátvektor, akkor minden $c\mathbf{x}$ ($c \neq 0$) is:

$$L(c\mathbf{x}) = cL\mathbf{x} = c\lambda\mathbf{x} = \lambda(c\mathbf{x}),$$

azaz $L(c\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x})$.

Á **A sajátvektorok alterei:** Ha az L lin.trafónak λ egy sajátértéke, akkor a λ -hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik a $\text{Ker}(L - \lambda I)$ altérrel.

B $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sv. $\iff L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff L\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff (L - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} \in \text{Ker}(L - \lambda I)$.

- D Az L lin.trafó λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai és a $\mathbf{0}$ alkotta alteret a λ **s.é.-hez tartozó sajátaltérnek** nevezzük.
- P
1. $!$ $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér, I az identikus leképezés. Ekkor a tetszőleges $c \in \mathbb{F}$ számra a cI leképezésnek a \mathcal{V} tér minden nemnulla vektora a c számhoz tartozó sajátvektora.
 2. $!$ $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ a valósok halmazán akárhányszor diffható valós függvények tere és $D : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}; f \mapsto f'$. D sajátvektora $e^{\lambda x}$, ami épp a λ sajátértékhez tartozik, mert $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$.
 3. A sík $\alpha \neq k\pi$ szöggel való elforgatásának nincs sajátvektora.
- F Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér?
1. a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre;
 2. a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre;
 3. a tér vektorainak forgatása egyenes körül $\alpha \neq k\pi$ szöggel;
 4. a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra;
 5. a tér vektorainak tükrözése egy síkra.

Mátrixleképezés sajátértéke, sajátvektora, sajátaltere

D $!$ \mathbb{F} test. Amh a $\lambda \in \mathbb{F}$ szám az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ mátrix **sajátértéke**, ha létezik olyan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor, melyre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$.

Az ilyen \mathbf{x} vektorokat az \mathbf{A} mátrix λ sajátértékhez tartozó **sajátvektorainak**, az általuk a $\mathbf{0}$ vektorral alkotott alteret az \mathbf{A} **sajátalterének**, a (λ, \mathbf{x}) párokat az \mathbf{A} **sajátpárjainak** nevezzük.

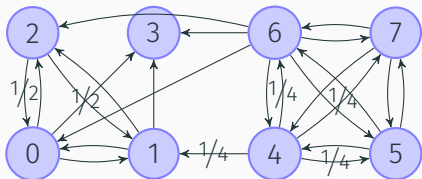
$\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ bal sajátvektor, ha $\mathbf{y}^T \mathbf{A} = \lambda \mathbf{y}^T$, azaz ha \mathbf{y} az \mathbf{A}^T sajátvektora.

P $(-1, (2, 1))$ és $(2, (1, 2))$ egy-egy sajátpárja a $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixnak, mert

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

Egy híres alkalmazás: a 25 000 000 000\$-os sajátvektor

- ? A feladat: rangsoroljuk a dokumentumokat a hivatkozások gráfja alapján aszerint, hogy ha véletlenül bolyongunk a dokumentumok között, akkor az legyen rangban előbb, ahol többször járunk.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Módosítás, hogy minden dokumentumból kiléphessünk:

$$[A]_{ij} = \begin{cases} 1/k, & \text{ha megy } i\text{-ből } j\text{-be él és } i \text{ ki-foka } k, \\ 1/n, & \text{ha } i \text{ ki-foka } 0 \text{ és } n \text{ a csúcsok száma,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- Módosítás, hogy ne ragadjunk be dokumentumok egy csoportjába:

$$\mathbf{M} = (1 - d)\mathbf{A} + d\frac{1}{n}\mathbf{J},$$

ahol \mathbf{J} a csupa 1-esből álló mátrix, n e négyzetes mátrixok rendje, és $d \in (0, 1)$.

Empírikus $d \in (0.1, 0.2)$ a jó választás, pl. $d = 0.15$, így $1 - d = 0.85$. Ekkor kerekített jegyekkel

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.302 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.302 & 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.444 & 0.444 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 \\ 0.019 & 0.231 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.231 & 0.231 & 0.231 \\ 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.302 & 0.019 & 0.302 & 0.302 \\ 0.160 & 0.019 & 0.160 & 0.160 & 0.160 & 0.160 & 0.019 & 0.160 \\ 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.302 & 0.019 \end{bmatrix}$$

- Ha \mathbf{x} a bolyongás kiindulópontjának valószínűségeloszlását megadó vektor, akkor az első lépés után a gráf i pontjában $[\mathbf{x}^T \mathbf{M}]_i$ valószínűséggel leszünk, az m -edik lépés után $[\mathbf{x}^T \mathbf{M}^m]_i$ valószínűséggel.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}^T \mathbf{M}^m = \mathbf{v}^T.$$

- (A pozitív mátrixok elmélete, Markov-láncok) $\rightsquigarrow \mathbf{v}^T$ az ún. stacionárius eloszlás, melyre $\mathbf{v}^T = \mathbf{v}^T \mathbf{M}$, és amely megadja, hogy egy-egy pontban aszimptotikusan mekkora valószínűséggel vagyunk a bolyongás során.
- $\mathbf{v} = (0.151, 0.157, 0.137, 0.137, 0.106, 0.100, 0.112, 0.100)$.
- Tehát a dokumentumok sorrendje: 1, 0, 2 & 3, 6, 4, 5 & 7 (két holtversennyel).

Sajátérték és sajátaltér meghatározása

Sajátaltér meghatározása

P Adjuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix 2-höz és a 10-hez, mint sajátértékhez tartozó sajátalterét.

M a 2 sajátérték $\iff (A - 2I)x = 0$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása.

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$x = \begin{bmatrix} -6s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

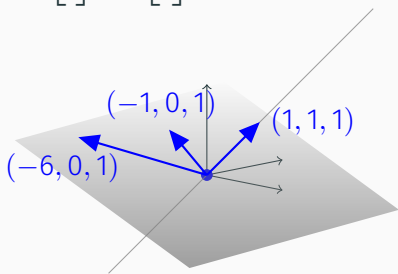
A sajátaltér egy bázisa $\{(-6, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

Sajátalter meghatározása (folyt)

A 10 is sajátérték:

$$A - 10I = \begin{bmatrix} -7 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -7 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ A sajátalteret az } (1, 1, 1) \text{ vektor feszíti ki.}$$



Hogyan találjuk meg a sajátértékeket?

Á λ pontosan akkor sajátértéke \mathbf{A} -nak, ha $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

B $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sv. $\iff \mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \iff \mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x}$ megoldása $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek $\iff \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \iff \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

D $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$. A $\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ polinomot az \mathbf{A} mátrixhoz tartozó **karakterisztikus polinomnak** nevezik.

A $\chi(\lambda) = 0$ egyenletet az \mathbf{A} mátrix **karakterisztikus egyenletének** nevezzük.

m Néhol a kar. pol. $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$, ami mindig 1-főegyütthatójú, de a konstans tag nem mindig a determináns.

Karakterisztikus polinom felírása

P Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

mátrixok karakterisztikus polinomját!

M Minden 2×2 -es mátrixra:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - \text{trace}(\mathbf{A})\lambda + \det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

nyom, determináns!

Karakterisztikus polinom felírása (folyt)

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & a & b \\ 0 & 1 - \lambda & c \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3.$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b & c \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a - \lambda)\lambda^2 + b\lambda + c \\ &= -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c. \end{aligned}$$

Háromszögmátrixok sajátértékei

- T A háromszögmátrixok és így a diagonális mátrixok sajátértékei megegyeznek a főátló elemeivel.
- B A háromszögmátrix $\rightsquigarrow \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ is \rightsquigarrow

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = 0,$$

aminek a gyökei a_{ii} ($i = 1, \dots, n$). Így ezek az \mathbf{A} sajátértékei.

Determináns, nyom és a sajátértékek

T Ha az n -edrendű \mathbf{A} mátrix sajátértékei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, akkor

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

$$\text{trace}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

A determináns a konstans tag, a nyom a $(-\lambda)^{n-1}$ együtthatója a karakterisztikus polinomban.

B A karakterisztikus polinom gyöktényező alakja:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

$\lambda = 0$ behelyettesítése után kapjuk, hogy $\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$.

- $(-\lambda)^{n-1}$ szorzat a determináns kigyókök determinánsainak összegére bontása alapján csak az $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$ szorzatból kapható, onnan pedig az épp $\sum_i a_{ii} = \text{trace}(\mathbf{A})$.

2×2 -es mátrixok sajátvektorainak szemléltetése

P Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

M

$$|\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} - \lambda & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_1 = i: \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} - i & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ amiből } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ 1 \end{bmatrix},$$

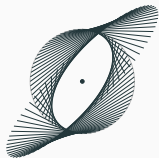
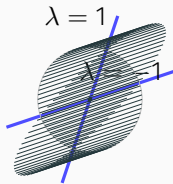
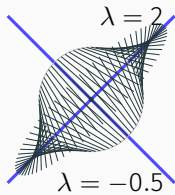
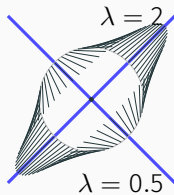
$$\lambda_2 = -i: \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} + i & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} + i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ amiből } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathbf{B}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathbf{C}}(\lambda) = \lambda^2 - 1, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathbf{D}}(\lambda) = \lambda^2 + 1, \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Sajátértékek és sajátvektorok meghatározása

m Tankönyvi módszer:

1. $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ gyökeinek meghatározása (sajátértékek)
2. $\forall \lambda: \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ bázisának meghatározása (a nulltér nemzérus vektorai a sajátvektorok)

P

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

M

1. felső háromszögmátrix: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$
2. $\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \rightsquigarrow t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} (s+t)/2 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a két sajátaltér $\text{span}((1, 0, 0))$ és $\text{span}((1/2, 1, 0), (1/2, 0, 1))$.

Karakterisztikus polinom és a racionálisgyök-tétel

$$\text{P } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{M } \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = -(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 11\lambda - 6)$$

racionálisgyök-tétellel: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 6$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$:

$$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} -s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$\lambda_3 = 6$:

$$\mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} x_1 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0. \end{array}$$

$x_3 = 3t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} 2t \\ 2t \\ 3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A karakterisztikus egyenlet komplex gyökei

P Határozzuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

M A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \lambda^2 - \lambda + 1 \rightsquigarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

- $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$:

$$A - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) I = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x - iy = 0.$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$- \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i:$$

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x + iy = 0.$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Többszörös gyökök: algebrai és a geometriai multiplicitás

D **Algebrai multiplicitás:** a λ sajátérték multiplicitása a karakterisztikus polinomban.

D **Geometriai multiplicitás:** a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója.

P
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

M $(4 - \lambda)^3$, a 4 algebrai multiplicitása 3.

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A $\lambda = 4$ sajátérték geometriai multiplicitása tehát 1.

Többszörös gyökök: algebrai és a geometriai multiplicitás

$$P \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, (1 - \lambda)^2(2 - \lambda)^2, \text{ gyökei } 1 \text{ és } 2$$

$$\lambda = 1: \mathbf{B} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

geometriai multiplicitás = algebrai multiplicitás = 2

$$\lambda = 2: \mathbf{B} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

geometriai multiplicitás = 1, algebrai multiplicitás = 2

Speciális mátrixok

Mátrix hatványainak sajátértékei

T \mathbf{A} invertálható \iff a 0 nem sajátértéke.

B \mathbf{A} invertálható $\iff \det(\mathbf{A}) \neq 0 \iff \det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0 \iff$ 0 nem sajátértéke \mathbf{A} -nak.

T Ha (λ, \mathbf{x}) az \mathbf{A} sajátpárja, $n \in \mathbb{Z}$, akkor (λ^n, \mathbf{x}) az \mathbf{A}^n sajátpárja, amennyiben λ^n és \mathbf{A}^n is értelmezve van.

B $n = 0$: $\lambda^0 = 1$ és $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I} \rightsquigarrow$ minden vektor sv. \checkmark

$n > 0$: (teljes indukcióval) $n = 1 \checkmark$

$n = k - 1 \Rightarrow n = k$:

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1} \mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^{k-1} \mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k \mathbf{x}.$$

\mathbf{A} invertálható: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \rightsquigarrow \frac{1}{\lambda} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}$, azaz $\lambda^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}$.

$n < 0$: $\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lambda^k \mathbf{x} \rightsquigarrow \lambda^{-k} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-k} \mathbf{x}$.

Mátrix hatványainak hatása

T Ha $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) az \mathbf{A} sajátpárjai, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{x}_i$, akkor
 $\mathbf{A}^m \mathbf{v} = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^m \mathbf{x}_i$.

B trivi

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^m \mathbf{v} &= \mathbf{A}^m (c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \mathbf{x}_k) \\ &= c_1 \mathbf{A}^m \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{A}^m \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \mathbf{A}^m \mathbf{x}_k \\ &= c_1 \lambda_1^m \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2^m \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \lambda_k^m \mathbf{x}_k.\end{aligned}$$

K Találunk-e mindig sajátvektorokból álló bázist?

Speciális valós mátrixok sajátértékei

T $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, λ egy tetszőleges sajátértéke

1. \mathbf{A} szimmetrikus $\Rightarrow \lambda$ valós,
2. \mathbf{A} ferdén szimmetrikus $\Rightarrow \lambda$ imaginárius,
3. \mathbf{A} ortogonális $\Rightarrow |\lambda| = 1$,
4. \mathbf{A} nilpotens $\iff \lambda = 0$, azaz karakterisztikus polinomja x^n .

B 1., 2.: $\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \lambda \mathbf{x} = \lambda |\mathbf{x}|^2$.

Vegyük mindkét oldal adjungáltját: $\mathbf{x}^H \mathbf{A}^T \mathbf{x} = \bar{\lambda} |\mathbf{x}|^2$.

! $\lambda = a + ib$. $\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \rightsquigarrow \lambda = \bar{\lambda}$, azaz $a + ib = a - ib \rightsquigarrow \Im(\lambda) = 0$.

$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \rightsquigarrow a + ib = -a + ib$, azaz $\Re(\lambda) = 0$.

3.: \mathbf{A} ortogonális $\rightsquigarrow |\mathbf{x}| = |\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\lambda\mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}| \rightsquigarrow |\lambda| = 1$

4.: $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, λ sé. $\rightsquigarrow \lambda^k$ sé. az $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ mátrixnak $\rightsquigarrow \lambda = 0$.

megfordítás a **Cayley–Hamilton-tételből** következik (minden mátrix kielégíti karakterisztikus polinomját): ha $x^n = 0$, akkor $\mathbf{A}^n = \mathbf{O}$, vagyis \mathbf{A} nilpotens.

Speciális komplex mátrixok sajátértékei

- T
1. önadjungált, akkor minden sajátértéke valós,
 2. ferdén önadjungált, akkor minden sajátértéke imaginárius,
 3. unitér, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke.

Hasonlóság, diagonalizálhatóság

Hasonló mátrixok sajátértékei

T **Sajátértékhez kapcsolódó invariánsok** Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor $\chi_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{B}}$, így sajátértékei, azok algebrai és geometriai multiplicitásai is megegyeznek.

1B A lineáris leképezés sajátértékének definíciójából világos.

2B $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{C}) = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{C}$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \sim \mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} \rightsquigarrow \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})$$

\rightsquigarrow megegyeznek sajátértékeik, és azok (algebrai) multiplicitásai

$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \sim \mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} \rightsquigarrow \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})) \rightsquigarrow$ a geometriai multiplicitások is megegyeznek.

m Van értelme **lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjáról**, beszélni (véges dimenziós esetben).

m Polinom együtthatói és gyökei közti összefüggések

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\lambda + \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

m Polinom együtthatói és gyökei közti összefüggések \rightsquigarrow a sajátértékek elemi szimmetrikus polinomjai invariánsak \rightsquigarrow szimmetrikus polinomjai invariánsak!

Elemi szimmetrikus polinomok:

$$e_1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = \text{trace}(\mathbf{A}),$$

$$e_2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j,$$

$$e_3(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \lambda_i \lambda_j \lambda_k,$$

\vdots

$$e_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det(\mathbf{A}).$$

Mátrixok diagonalizálhatósága

- D Amh az $n \times n$ -es A mátrix **diagonalizálható**, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan diagonális Λ és egy invertálható C mátrix, hogy

$$\Lambda = C^{-1}AC. \quad (1)$$

- D A $\Lambda = C^{-1}AC$ átírható

$$A = C\Lambda C^{-1}$$

alakba, amit az A mátrix **sajátfelbontásának** nevezünk.

Mátrixok diagonalizálhatósága

T **Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele** Az $n \times n$ -es \mathbf{A} mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha \mathbf{A} -nak van n lineárisan független sajátvektora.

Ekkor Λ az \mathbf{A} sajátértékeiből, \mathbf{C} a sajátvektoraiból áll.

B $\Lambda = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \iff \mathbf{C}\Lambda = \mathbf{A}\mathbf{C}$ és \mathbf{C} invertálható

! $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n]$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

$$[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n]. \quad (2)$$

$$\iff \mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$$

de \mathbf{C} invertálható, így oszlopvektorai lineárisan függetlenek.

P Diagonalizálható-e a következő mátrix?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

M $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, a sajátvektorok $(1, 0, 0)$, $(1/2, 1, 0)$ és $(1/2, 0, 1)$, és ezek függetlenek

$\rightsquigarrow \mathbf{A} \sim \Lambda$, ahol

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés: $\mathbf{C}\Lambda = \mathbf{A}\mathbf{C}$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bal sajátvektorok

D Az $\mathbf{y}^T \mathbf{A} = \lambda \mathbf{y}^T$ egyenlet $\mathbf{y}^T \neq \mathbf{0}^T$ feltételnek megfelelő sorvektorait az \mathbf{A} mátrix **bal sajátvektorainak** nevezzük.

m ezek a transzponált sajátvektorai: $\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}$.

m $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^T) = \det(\mathbf{A}^T - \lambda \mathbf{I}) \rightsquigarrow \mathbf{A}$ és \mathbf{A}^T

karakterisztikus polinomja azonos \rightsquigarrow bal és jobb sajátértékek közt nincs különbség

m $\Lambda = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} \rightsquigarrow \Lambda \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{C}^{-1}$ sorvektorai \mathbf{A} bal sajátvektorai, ugyanis

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

tehát $\lambda_i \mathbf{y}_i^T = \mathbf{y}_i^T \mathbf{A}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

A sajátfelbontás diadikus alakja

m

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} &= [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^T \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1^T + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2^T + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n \mathbf{y}_n^T \end{aligned} \quad (3)$$

D Ezt nevezzük a **sajátfelbontás diadikus alakjának**.

A sajátfelbontás diadikus alakja

P $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ bal sajátvektorai, sajátfelbontása, diadikus alakja?

M Bal sajátvektor: „a transzponált sajátvektorainak transzponáltjai”, vagy „a C^{-1} sorvektorai”. A sajátfelbontás:

$$A = C\Lambda C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Különböző sajátértékek sajátalterei

T Ha $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ különböző sajátértékei az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ mátrixnak, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

B Indirekt: tfh e vektorok lineárisan összefüggők. Legyen \mathbf{x}_i a legkisebb indexű, mely csak kisebb indexűektől függ:

$\mathbf{x}_i = c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1} \mathbf{x}_{i-1}$, de az \mathbf{x}_j vektorok $j < i$ esetén lin. ftlenek.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{A}(c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1} \mathbf{x}_{i-1}) = c_1 \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1} \mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1},$$

$$\lambda_i \mathbf{x}_i = c_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1} \lambda_{i-1} \mathbf{x}_{i-1}$$

Kivonva az \mathbf{x}_j λ_j -szereséből:

$$\mathbf{0} = c_1(\lambda_i - \lambda_1) \mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1}) \mathbf{x}_{i-1},$$

Az $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$ vektorok lin. függetlenek és $\lambda_1, \dots, \lambda_i$ különbözőek, ezért $c_1 = \dots = c_{i-1} = 0 \rightsquigarrow \mathbf{x}_i = 0\mathbf{x}_1 + \dots + 0\mathbf{x}_{i-1} = \mathbf{0}$,

Ellentmondás: \mathbf{x}_i sajátvektor, tehát $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$.

- K Ha különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek mindegyikéből lineárisan független vektorokat választunk, akkor még ezek egyesítése is lineárisan független lesz.
- K Különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek mindegyikéből egy bázist választva, azok egyesítése is lineárisan független vektorrendszer ad.
- K Ha az n -edrendű \mathbf{A} mátrixnak n darab különböző sajátértéke van, akkor diagonalizálható.
- B n különböző sajátértékhez n független sajátvektor tartozik \rightsquigarrow diagonalizálható.

Algebrai és geometriai multiplicitás kapcsolata

T Egy mátrix valamely sajátértékének geometriai multiplicitása nem lehet nagyobb az algebrai multiplicitásánál.

B **A** mátrix, μ geometriai multiplicitása $g = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}))$.
a sajátaltér egy bázisa $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_g\}$, kiegészítjük a $\mathbf{x}_{g+1}, \dots, \mathbf{x}_n$
vektorokkal az egész tér bázisává.

! $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_g | \mathbf{x}_{g+1} \ \dots \ \mathbf{x}_n] = [\mathbf{X} | \mathbf{Y}]$, \mathbf{C}^{-1} -et első g sora után
bontsuk blokkokra:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}.$$

\mathbf{X} oszlopai a μ -höz tartozó sajátvektorok: $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mu\mathbf{X}$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_g & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_{n-g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} [\mathbf{X} \ \mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{X} & \mathbf{Z}\mathbf{Y} \\ \mathbf{W}\mathbf{X} & \mathbf{W}\mathbf{Y} \end{bmatrix}.$$

Algebrai és geometriai multiplicitás kapcsolata (folyt)

$$\rightsquigarrow WX = \mathbf{0}, ZY = \mathbf{0}, ZX = I_g, WY = I_{n-g}.$$

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} Z \\ W \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZAX & ZAY \\ WAX & WAY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu I_g & ZAY \\ \mathbf{0} & WAY \end{bmatrix},$$

ugyanis $ZAX = Z\mu X = \mu ZX = \mu I_g$, és $WAX = \mu WX = \mathbf{0}$

a karakterisztikus polinom:

$$\begin{vmatrix} \mu I_g - \lambda I_g & ZAY \\ \mathbf{0} & WAY - \lambda I_{n-g} \end{vmatrix} = (\mu - \lambda)^g \det(WAY - \lambda I_{n-g})$$

$\rightsquigarrow C^{-1}AC$ és ezzel együtt A karakterisztikus polinomjának μ legalább g -szeres algebrai multiplicitású gyöke.

Diagonalizálhatóság és a geometriai multiplicitás

- T** Egy n -edrendű négyzetes mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a sajátértékeihez tartozó geometriai multiplicitások összege n .
- B** (\Rightarrow) Ha a mátrix diagonalizálható, akkor a sajátvektoraiból álló bázis elemszáma épp a geometriai multiplicitások összege, hisz egyetlen sajátvektor sem lehet két sajátaltérben.
- (\Leftarrow) Ha a geometriai multiplicitások összege n , akkor minden sajátaltérből kiválasztva egy bázist, és véve ezek egyesítését, egy n sajátvektorból álló független vektorrendszert kapunk.
- T** Ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ minden sajátértéke \mathbb{F} -beli (pl. mert \mathbb{F} algebrailag zárt test), akkor \mathbf{A} pontosan akkor diagonalizálható, ha minden sajátértékének algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik.

Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása

D **A spektruma:** \mathbf{A} sajátértékeinek halmaza (?családja?), jele $\sigma(\mathbf{A})$.
m bontsuk fel a \mathbf{C} és \mathbf{C}^{-1} mátrixot is blokkokra a következők szerint:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \lambda_k \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \dots \quad \mathbf{X}_k], \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^T \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{C} \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}^{-1} = [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \dots \quad \mathbf{X}_k] \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \lambda_k \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^T \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_1^T + \lambda_2 \mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_2^T + \dots + \lambda_k \mathbf{X}_k \mathbf{Y}_k^T \\ &= \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{P}_k, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{P}_j = \mathbf{X}_j \mathbf{Y}_j^T$ a λ_j sajátértékhez tartozó mátrix.

T Minden $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ spektrumú diagonalizálható \mathbf{A} mátrix felírható

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{P}_k$$

alakban, ahol

1. $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$,

2. $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, ha $i \neq j$,

3. \mathbf{P}_i az $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ sajátaltérre való $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ menti vetítés.

1. $\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}$ és $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T \rightsquigarrow \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$.

2. $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I} \rightsquigarrow \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i = \mathbf{I}$, $\mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_j = \mathbf{O}$ ($i \neq j$) $\rightsquigarrow \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_j \mathbf{Y}_j^T = \mathbf{O}$.

3. $\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{X}_i (\mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i) \mathbf{Y}_i^T = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T = \mathbf{P}_i \rightsquigarrow \mathbf{P}_i$ vetítés!

- Mivel bármely két \mathbf{X} , \mathbf{Y} mátrixra $\mathcal{O}(\mathbf{X}\mathbf{Y}) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{X})$

$$\mathcal{O}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{X}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{P}_i \mathbf{X}_i) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{P}_i).$$

$\rightsquigarrow \mathcal{O}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{X}_i) = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$, hiszen $\mathcal{O}(\mathbf{X}_i)$ a λ_i -hez tartozó sajátaltér.

- Megmutatjuk, $\mathcal{N}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$.

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = \mathbf{P}_i \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{P}_j - \lambda_i \sum_{j=1}^k \mathbf{P}_j \right) = \sum_{j=1}^k (\lambda_j - \lambda_i) \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}.$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{P}_i).$$

$\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = \mathcal{O}(\mathbf{P}_i)$, így a dimenziótétel miatt $\dim \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = \dim \mathcal{N}(\mathbf{P}_i)$, ami bizonyítja, hogy $\mathcal{N}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$.

- D A fenti felbontást nevezzük a diagonalizálható \mathbf{A} **spektrálfelbontásának**.

Spektrálfelbontás

P Határozzuk meg az A mátrix spektrálfelbontását.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

M A sajátértékekből és a jobb és bal sajátvektorokból:

$$A = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ahol

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Ellenőrizhetjük: $P_1 + P_2 = I$, $P_1 P_2 = O$, vetítő mátrixok, mert $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$, és a sajátalterekre vetítenek.

Alterek direkt összege

- D ! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ véges dimenziós vt., $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_k \leq \mathcal{V}$. Amh a \mathcal{V} tér a $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_k$ alterek **direkt összege**, jelölése $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_k = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{V}_i$, ha \mathcal{V} minden vektora egyértelműen felbomlik egy \mathcal{V}_1 -re, egy \mathcal{V}_2 -re... és egy \mathcal{V}_k -beli vektor összegére.
- T ! $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k \leq \mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V} = n$. Ekkor ekvivalensek:
1. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_k$
 2. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus (\mathcal{V}_2 \oplus (\mathcal{V}_3 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_k))$
 3. $\sum_{i=1}^k \mathcal{V}_i = \mathcal{V}$, $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_i$ és $\sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, k$
 4. $\sum_{i=1}^k \mathcal{V}_i = \mathcal{V}$ és $\mathcal{V}_i \cap (\sum_{j \neq i} \mathcal{V}_j) = \{\mathbf{0}\}$, és
 5. $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$ egy-egy bázisának egyesítése a \mathcal{V} bázisát adja.
- m 3.-ban **nem elég** kikötni, hogy $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\mathbf{0}\}$ bármely $i \neq j$ esetén!
! $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ fggtln, $\mathcal{V}_1 = \text{span}(\mathbf{a})$, $\mathcal{V}_2 = \text{span}(\mathbf{b})$, $\mathcal{V}_3 = \text{span}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$
 $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\mathbf{0}\}$, de $\mathbb{R}^2 \neq \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{V}_3$, $(\mathbf{0} + \mathbf{0} + (\mathbf{a} + \mathbf{b})) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{0}$. 47

B (1. \Leftrightarrow 2.) \checkmark

- (1. \Rightarrow 3.) \checkmark , (3. \Rightarrow 1.) indirekt \checkmark

- (3. \Rightarrow 4.) indirekt: Ámn $L! \mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1 \cap \left(\sum_{j=2}^k \mathcal{V}_j\right)$.

$$\rightsquigarrow -\mathbf{v}_1 \in \sum_{j=2}^k \mathcal{V}_j \rightsquigarrow -\mathbf{v}_1 = \sum_{j=2}^k \mathbf{v}_j, \text{ ahol } \mathbf{v}_j \in \mathcal{V}_j.$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{0} = \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_1) = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i \rightsquigarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \dots = \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}.$$

- (4. \Rightarrow 3.) Tfh $\forall i \mathcal{V}_i \cap \left(\sum_{j \neq i}^k \mathcal{V}_j\right) = \{0\}$.

$L! \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_i: \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$. Ámn Tfh $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. Mivel $-\mathbf{v}_1 = \sum_{j=2}^k \mathbf{v}_j$, ezért

$$\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1 \cap \left(\sum_{j=2}^k \mathcal{V}_j\right) \not\checkmark$$

- (1. \Rightarrow 5.) A \mathcal{V}_i terek bázisainak uniója generátorrendszer \checkmark

Ha $\{\mathbf{b}_{ij}\}$ a \mathcal{V}_i bázisa és $\sum_i \sum_j c_{ij} \mathbf{b}_{ij} = \mathbf{0}$, akkor a $\mathbf{v}_i = \sum_j c_{ij} \mathbf{b}_{ij}$

jelöléssel $\sum_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ és $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_i$

$\rightsquigarrow \mathbf{v}_1 = \dots = \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \rightsquigarrow c_{ij} = 0 \forall i, j$ -re \rightsquigarrow a bázisok uniója

lineárisan független \rightsquigarrow bázis.

- (5. \Rightarrow 1.) \checkmark

Sajátalterek direkt összege

T $L!$ $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér és $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ az $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lin. leképezés különböző sajátértékei. Jelölje \mathcal{V}_{λ_i} a λ_i -hez tartozó sajátalteret. Ekkor

$$\mathcal{V}_{\lambda_1} + \dots + \mathcal{V}_{\lambda_k} = \mathcal{V}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{\lambda_k}.$$

B $L!$ $\mathcal{B}_i = \{\mathbf{b}_{i1}, \mathbf{b}_{i2}, \dots\}$ a \mathcal{V}_{λ_i} egy bázisa. Elég megmutatni, hogy $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ lineárisan független.

k -ra vonatkozó teljes indukcióval: $k = 1$ ✓

Tfh k -nál kisebb altérszámra már igaz. $L!$

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^k \sum_j c_{ij} \mathbf{b}_{ij}. \quad (4)$$

Indirekt módon tfh a bázisvektorok uniója lin. összefüggő. Ámn felt., hogy $c_{11} \neq 0$.

Szorozzuk meg a (4) egyenlőséget λ_k -val, és ebből vonjuk ki L általi képét:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lambda_k \mathbf{0} - L\mathbf{0} = \sum_{i,j} c_{ij} \lambda_k \mathbf{b}_{ij} - \sum_{i,j} c_{ij} L \mathbf{b}_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_j c_{ij} (\lambda_k - \lambda_i) \mathbf{b}_{ij} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_j c_{ij} (\lambda_k - \lambda_i) \mathbf{b}_{ij} \end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint az utolsó összegben minden együttható 0, másrészt $c_{11}(\lambda_k - \lambda_1) \neq 0 \quad \nexists$

K Ha \mathcal{V} véges dimenziós, akkor az $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris leképezésekre a következők ekvivalensek:

1. L diagonalizálható
2. $\mathcal{V} = \bigoplus_i \mathcal{V}_{\lambda_i}$
3. $\dim \mathcal{V} = \sum_i \dim \mathcal{V}_{\lambda_i}$

A diagonalizálás alkalmazásai

Diagonalizálható mátrixok polinomjai

- D** **Mátrix polinomja** $\forall p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ polinomra és \forall négyzetes **A** mátrixra értelmezhető p -nek **A**-ban fölvevett értéke: $p(\mathbf{A}) = c_n \mathbf{A}^n + c_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + c_1 \mathbf{A} + c_0 \mathbf{I}$.
- m** $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} \rightsquigarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{C}^{-1}$, általában tetszőleges nemnegatív k egészre $\mathbf{A}^k = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{C}^{-1}$.
- \rightsquigarrow bármely $p(x)$ polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\mathbf{\Lambda})\mathbf{C}^{-1}$, ahol

$$p(\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n)).$$

- Á** **Diagonalizálható mátrix polinomja** Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$, ahol $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, és $p(x)$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}.$$

Példa

P Számítsuk ki az \mathbf{A}^{10} mátrixot!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

M Sajátfelbontása $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{Így } \mathbf{A}^{10} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1)^{10} - 2^{10} & -2 \cdot (-1)^{10} + 2 \cdot 2^{10} \\ (-1)^{10} - 2^{10} & -(-1)^{10} + 2 \cdot 2^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1022 & 2046 \\ -1023 & 2047 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fibonacci-sorozat explicit alakja

T A **Fibonacci-sorozat**ra ($F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, első néhány tagja: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,...) igaz a következő:

$$F_n = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \right)_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

B Az első egyenlőség teljes indukcióval bizonyítható. Jelölés:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$n = 1$ -re trivi, $n \Rightarrow n + 1$:

$$\mathbf{F}^{n+1} = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} + F_n \\ F_{n+1} & F_n + F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Fibonacci-sorozat (1. bizonyítás)

B $\chi_F(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, F sajátértékei $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $\mathbf{x}_{1,2} = (1, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}))$.

F^n sajátfelbontásával:

$$F^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^{-1}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

ahonnan

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Fibonacci-sorozat (2. bizonyítás)

B Vegyük észre

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{F}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az \mathbf{x}_1 és \mathbf{x}_2 sajátvektorok bázist alkotnak \mathbb{R}^2 -ben, így a $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ előáll azok lineáris kombinációjaként:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 = 1/\sqrt{5} \mathbf{x}_1 - 1/\sqrt{5} \mathbf{x}_2.$$

$\mathbf{F}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \lambda_1^n \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2^n \mathbf{x}_2$, behelyettesítés után ezt kapjuk:

$$\mathbf{F}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}.$$

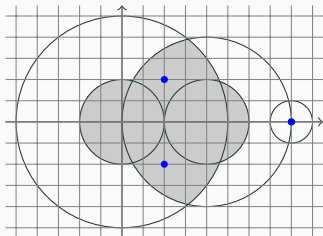
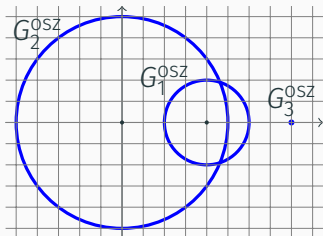
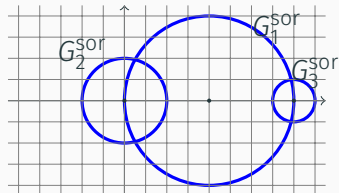
Itt csak az első koordinátát kiszámolva, a tételbeli állítást igazoltuk.

A sajátérték kiszámítása

- D **Gersgorin-körök:** Az $n \times n$ -es valós vagy komplex \mathbf{A} mátrix Gersgorin-körein az a_{ii} középpő, és r_i^{SOR} sugarú G_i^{SOR} , illetve r_i^{OSZ} sugarú G_i^{OSZ} köröket értjük ($i = 1, 2, \dots, n$), ahol

$$r_i^{\text{SOR}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad r_i^{\text{OSZ}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|. \quad (5)$$

P Az $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ mátrix Gersgorin körei:



T **A** valós vagy komplex $n \times n$ -es mátrix.

- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{SOR}}, \sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{OSZ}}, \sigma(\mathbf{A}) \subseteq (\bigcup_i G_i^{\text{SOR}} \cap \bigcup_i G_i^{\text{OSZ}}),$
- Ha a G_i^{SOR} körök egy k -elemű részhalmaza diszjunkt a maradék $n - k$ körtől, akkor uniójuk multiplicitással számolva pontosan k sajátértéket tartalmaz.

B (λ, \mathbf{x}) saját pár, $\max_i x_i = 1$, tehát $|x_j| \leq 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

$\lambda = \lambda x_i = [\lambda \mathbf{x}]_i = [\mathbf{A}\mathbf{x}]_i = \sum_j a_{ij} x_j$, így $\lambda - a_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j$, tehát

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = r_i^{\text{SOR}}.$$

$\mathbf{B}(r) = r\mathbf{A} + (1 - r) \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, így $\mathbf{B}(0) = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, $\mathbf{B}(1) = \mathbf{A}$. Változzék r folyamatosan 0-tól 1-ig.

K Bármely soronként domináns főátlójú valós vagy komplex mátrix invertálható. Hasonló igaz az oszloponként domináns főátlójú mátrixokra is. (Hisz Gersgorin-körei nem tartalmazzák az origót)

D Egy sajátérték **szigorúan domináns**, ha egyszeres multiplicitású, és abszolút értékben nagyobb az összes többinél. (**szigorúan domináns sajátvektor, sajátaltér, sajátpár**)

M $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, λ_1 szigorúan domináns sajátérték, $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ sajátpár, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|$, (λ_1 valós, egyébként $\overline{\lambda_1}$ is sé. lenne).

L! $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_m \mathbf{v}_m$, $k > 0$ egész:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k \mathbf{x} &= c_1 \mathbf{A}^k \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{A}^k \mathbf{v}_2 + \dots + c_m \mathbf{A}^k \mathbf{v}_m \\ &= c_1 \lambda_1^k \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2^k \mathbf{v}_2 + \dots + c_m \lambda_m^k \mathbf{v}_m.\end{aligned}$$

Ekkor λ_1^k -val való osztás után $k \rightarrow \infty$ esetén

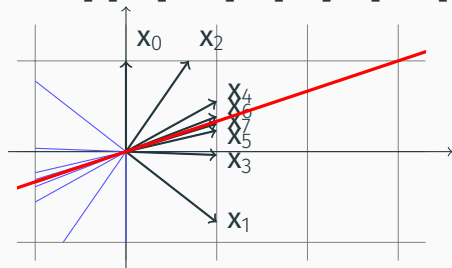
$$\frac{1}{\lambda_1^k} \mathbf{A}^k \mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_2 + \dots + c_m \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_m \rightarrow c_1 \mathbf{v}_1,$$

Ha $c_1 \neq 0$, akkor $\mathbf{A}^k \mathbf{x}$ iránya tart a domináns sajátvektor irányához.

T Hatványmódszer: Ha λ_1 az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix szigorúan domináns sajátértéke, akkor létezik olyan \mathbf{x}_0 vektor, hogy az $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$ vektorok által kifeszített alterek sorozata a domináns sajátaltérhez konvergál, míg $\frac{\mathbf{x}_k^T \mathbf{A} \mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k} \rightarrow \lambda$ (ún. Rayleigh hányadosok).

P Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.9 \\ 0.9 & -0.7 \end{bmatrix}$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{A}^k \mathbf{x}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.7 \\ -0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.9 \\ 2.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18.9 \\ 7.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 38.7 \\ 11.9 \end{bmatrix}$



Kérdések, feladatok, egyszerű
állítások

Á Ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot \mathbb{C} fölöttinek tekintjük, és λ sajátérték, akkor $\bar{\lambda}$ is.

Á \mathbf{A} és \mathbf{A}^T sajátértékei azonosak, azonos algebrai multiplicitással.

Á Ha \mathbf{A} minden sor- vagy oszlopösszege c , akkor c az \mathbf{A} egy sajátértéke.

Á Ha (λ, \mathbf{x}) az \mathbf{A} egy sajátpárja és p egy polinom, akkor $(p(\lambda), \mathbf{x})$ sajátpárja a $p(\mathbf{A})$ mátrixnak.

Á Ha $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ és legalább egyikük invertálható, akkor $\mathbf{AB} \sim \mathbf{BA}$ (tehát sajátértékei azonosak).

Á Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n \times m}$ és $m \geq n$, akkor $\chi_{\mathbf{AB}}(x) = x^{m-n} \chi_{\mathbf{BA}}(x)$.

B

$$\begin{bmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{O}_{m \times n} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{A} \\ \mathbf{O}_{n \times m} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_{m \times n} \\ \mathbf{B} & \mathbf{BA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & -\mathbf{A} \\ \mathbf{O}_{n \times m} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

- Á Ha \mathbf{A} invertálható és diagonalizálható, akkor \mathbf{A}^{-1} is diagonalizálható.
- Á Ha \mathbf{A} a zérusmátrixtól különböző nilpotens mátrix, akkor **nem** diagonalizálható.
- Á Ha \mathbf{P} vetítő mátrix (idempotens, azaz $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$), akkor \mathbf{P} diagonalizálható, és minden sajátértéke 0 vagy 1.
- Á Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sajátértékei folytonos függvényei a mátrix elemeinek.
- B A karakterisztikus polinomot definiáló determinánst a kígyók összegére bontva látható, hogy $\chi_{\mathbf{A}}$ minden együtthatója \mathbf{A} elemeiből képzett szorzatok összege, tehát azok folytonos függvénye.
- Egy komplex polinom gyökei az együtthatók folytonos függvényei.
- P Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, \mathbf{x} az \mathbf{A} egy sajátvektora, \mathbf{y}^H a \mathbf{B} egy bal sajátvektora. (a) Igazoljuk, hogy az $L : \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n}; \mathbf{X} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}$ lineáris leképezés, melynek $\mathbf{x}\mathbf{y}^H$ egy sajátvektora! (b) $\text{trace}(L) = \text{trace}(\mathbf{A})\text{trace}(\mathbf{B})$