BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Bevezetés az algebrába 2

BMETE91AM37

Euklideszi tér, ortogonalizáció

H607 – 2017-02-13

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Valós euklideszi tér

Skaláris szorzat másik bázisban

P Legyen $\mathcal{B} = \{(2,0,1),(1,1,0),(0,-1,1)\}$. Milyen képlettel számolható ki az $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ skaláris szorzat, ha a két vektor $\mathcal{B}$-beli koordinátás alakját ismerjük?

M Jelölje az $\mathbf{x}$ vektor $\mathcal{B}$-beli koordinátás alakját $\mathbf{x}_\mathcal{B}$, a standard alakot $\mathbf{x}_\mathcal{E}$.

Ekkor $\mathbf{x}_\mathcal{E} = \mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{x}_\mathcal{B}$. Így

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}_\mathcal{E}^\mathsf{T}\mathbf{y}_\mathcal{E} = (\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{x}_\mathcal{B})^\mathsf{T}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{y}_\mathcal{B} = \mathbf{x}_\mathcal{B}^\mathsf{T}(\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^\mathsf{T}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}})\mathbf{y}_\mathcal{B} = \mathbf{x}_\mathcal{B}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{y}_\mathcal{B}.$$

Esetünkben

$$\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^\mathsf{T}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

K Mit tudunk a $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ mátrixról?

Szimmetrikus, invertálható, de ez még kevés.

A skaláris szorzás alaptulajdonságai $\mathbb{R}^n$-ben

T Legyen $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ az $\mathbb{R}^n$ három tetszőleges vektora, és legyen c egy teszőleges valós. Ekkor

a)	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$	a művelet fölcserélhető (kommutatív)
b)	$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$	disztributív
c)	$(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$	a két szorzás kompatibilis

d) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geq 0$ és $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

B Egyszerű, pl. az *a)*:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= u_1v_1+u_2v_2+\ldots+u_nv_n = v_1u_1+v_2u_2+\ldots+v_nu_n\\ &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}.\end{aligned}$$

m A *d)* pont szerint egy másik bázisban felírva a skaláris szorzást, $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{x}>0$ kell $\forall\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ vektorra.

D A $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixot pozitív definitnek nev., ha $\forall\mathbf{x}\neq\mathbf{0}:\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{x}>0$.

Valós euklideszi tér

D Legyen $\mathcal{V}$ egy tetszőleges valós vektortér, és legyen

$$\langle .,. \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$$

olyan függvény, melyre bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ vektorok és $c \in \mathbb{R}$ skalár esetén

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle && \text{szimmetria} \\ \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle && \text{homogenitás} \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle && \text{additivitás} \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &> 0, \text{ ha } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} && \text{pozitivitás} \end{aligned}$$

E $\langle .,. \rangle$ függvényt a $\mathcal{V}$-n értelmezett skaláris szorzásnak, a skaláris szorzással ellátott $\mathcal{V}$ vektorteret euklideszi térnek nevezzük.

m A kétváltozós, és mindkét változójában lineáris függvényt bilineárisnak nevezzük.

P $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})\mathbf{y}$ skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben, ha $\mathbf{A}$ invertálható. (Be fogjuk látni, hogy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{y}$ pontosan akkor skaláris szorzás, ha $\mathbf{B}$ pozitív definit.)

P Az $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixokra az $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \mathrm{trace}(\mathbf{A}\mathbf{B}^\mathsf{T}) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$ skaláris szorzást definiál.

P $\mathbb{R}[x]$- vagy $\mathbb{R}[x]_n$-ben bármely $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$ esetén $\langle p, q \rangle = \int_a^b pq$ skaláris szorzást definiál.

P Az $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ sorozatok, melyekre $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty$. vektorteret alkotnak, melyen skaláris szorzást definiál $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$.

P Az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények $C[a, b]$ vektorterén az $f, g \in C[a, b]$ függvényekre az $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$ skaláris szorzás.

F A $\mathbf{B} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ mátrix pontosan akkor pozitív definit, ha $b = c$, $a > 0$ és $ad - b^2 > 0$.

Távolság és szög valós euklideszi térben

D L! $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ két tetszőleges vektor.

1. Az $\mathbf{u}$ vektor hosszán (abszolút értékén, normáján) önmagával vett skaláris szorzatának gyökét értjük, azaz
$$|\mathbf{u}| = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}. \tag{1}$$
2. Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok (hajlás)szögének koszinusza:
$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\angle} := \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \tag{2}$$
3. Amh az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok merőlegesek egymásra, ha
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0. \tag{3}$$
4. A két vektor (végpontjának) távolsága
$$\mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \tag{4}$$

Koordinátás alakok

P $\mathbf{u} = (2, 3, 4, 14)$, $\mathbf{v} = (4, 6, -10, 10)$, $\mathbf{w} = (0, 3, 6, -2)$, $|\mathbf{u}| =?$, $\mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) =?$, $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{w})_\angle =?$

M Az (1), a (4) és a (2) képletekkel:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}| &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2} = \sqrt{225} = 15, \\
d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sqrt{(2-4)^2 + (3-6)^2 + (4-(-10))^2 + (14-10)^2} \\
&= \sqrt{2^2 + 3^2 + 14^2 + 4^2} = 15 \\
\cos(\mathbf{u}, \mathbf{w})_\angle &= \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 14 \cdot (-2)}{15 \cdot \sqrt{0^2 + 3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{21}.
\end{aligned}$$

Ortonormált és ortogonális bázis

OR és ONR lineáris függetlensége

D A páronként merőleges vektorokból álló vektorrendszert ortogonális rendszernek (OR), az egységvektorokból álló OR-t ortonormált rendszernek (ONR) nevezzük.

Á A $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorokrendszer vektorai zérusvektortól különbözőek és OR-t alkotnak, akkor

1. független,
2. $\{\mathbf{v}_i/|\mathbf{v}_i|\}$ ONR.

B TFH valamely c_1, c_2,..., c_k konstansokra $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Mivel $i \neq j$ esetén $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$, ezért a $\mathbf{v}_i$ vektorral beszorozva $c_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0$, amiből $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \neq 0$ miatt következik, hogy $c_i = 0$.

2. $\dfrac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle}{|\mathbf{v}_i||\mathbf{v}_j|} = \left\langle \dfrac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|}, \dfrac{\mathbf{v}_j}{|\mathbf{v}_j|} \right\rangle$

K Egy zérusvektort nem tartalmazó OR, vagy ONR mindig bázisa az általa kifeszített altérnek.

Legjobb közelítés ONB esetén

T L! $\mathcal{V}$ valós euklideszi tér, $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\} \subset \mathcal{V}$ ONR és a $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor. Ekkor a

$$\hat{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \, \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle \, \mathbf{e}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle \, \mathbf{e}_k \tag{5}$$

vektor az $\mathcal{A} = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ altér $\mathbf{v}$-hez legközelebb fekvő pontja, azaz $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$.

B $\langle \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{e}_j \rangle = \left\langle \mathbf{v} - \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle \, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \right\rangle = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, tehát $\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \perp \mathcal{A}$, azaz $\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{A}^{\perp}$.
Így a merőleges vetület definíciója szerint $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$.

K ha $\mathcal{V}$ k-dimenziós ($\mathcal{E}$ a $\mathcal{V}$ bázisa), akkor
$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \, \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle \, \mathbf{e}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle \, \mathbf{e}_k$

K Ha $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\} \subset \mathcal{V}$ nullvektort nem tartalmazó OR, akkor

$$\hat{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}_i \rangle}{|\mathbf{a}_i|^2} \mathbf{a}_i, \text{ és ha } \mathcal{A} \text{ ortogonális bázis, akkor } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}_i \rangle}{|\mathbf{a}_i|^2} \mathbf{a}_i.$$

Legjobb közelítés ONB esetén 2

m A $\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle$ skalárt a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{e}_i$-hez tartozó Fourier-együtthatójának is nevezik.

P Határozzuk meg a $(3, 1, 2)$ pontnak az $(2, 3, 6)$ és $(3, -6, 2)$ vektorok által kifeszített síkra való merőleges vetületét!

K Hányféle módon tudnánk megoldani korábbi tudásunkra építve?

M E két vektor a síkban OR-t alkot! Normálás után $\mathbf{a} = \frac{1}{7}(2, 3, 6)$ és $\mathbf{b} = \frac{1}{7}(3, -6, 2)$ ONR.
Behelyettesítés:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{v}} &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{b} \\
&= \left\langle (3, 1, 2), \left(\tfrac{2}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{6}{7}\right) \right\rangle \left(\tfrac{2}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{6}{7}\right) + \left\langle (3, 1, 2), \left(\tfrac{3}{7}, \tfrac{-6}{7}, \tfrac{2}{7}\right) \right\rangle \left(\tfrac{3}{7}, \tfrac{-6}{7}, \tfrac{2}{7}\right) \\
&= 3\left(\tfrac{2}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{6}{7}\right) + 1\left(\tfrac{3}{7}, \tfrac{-6}{7}, \tfrac{2}{7}\right) \\
&= \left(\tfrac{9}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{20}{7}\right).
\end{aligned}$$

Ortogonalizáció

Gram–Schmidt-ortogonalizáció

T Ha $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ egy független vektorrendszer egy $\mathcal{V}$ euklideszi térben, akkor létezik olyan ortogonális $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ vektorrendszer, hogy minden $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén

$$\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i) = \operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_i). \tag{6}$$

Ebből normálással ortonormált rendszert kapunk:

$$\left\{ \frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}, \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|}, \ldots, \frac{\mathbf{b}_k}{|\mathbf{b}_k|} \right\}$$

m Igazolható, hogy a Gram–Schmidt-ortogonalizáció működik összefüggő vektorokból álló vektorrendszerre is, annyi változással, hogy pontosan akkor lesz $\mathbf{b}_i = \mathbf{0}$, ha $\mathbf{a}_i$ nem független a kisebb indexű vektoroktól, azaz $\mathbf{a}_i$ benne van a $\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{i-1})$ altérben.

B A $\mathrm{span}(\mathbf{a}_1) = \mathrm{span}(\mathbf{b}_1)$ összefüggés teljesül, ha $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$.
$\mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \mathrm{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ és $\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{b}_2$ teljesül, ha $\mathbf{b}_2$ az $\mathbf{a}_2$-nek a $\mathbf{b}_1$ által kifeszített altérre merőleges összetevője:

$$\mathbf{b}_2 := \mathbf{a}_2 - \left\langle \mathbf{a}_2, \frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|} \right\rangle \frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|} = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 \rangle}{|\mathbf{b}_1|^2} \mathbf{b}_1$$

$\mathbf{b}_2 \neq \mathbf{0}$, hisz $\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$ esetén $\mathbf{a}_2 = \frac{\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 \rangle}{|\mathbf{b}_1|^2} \mathbf{b}_1 = \frac{\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 \rangle}{|\mathbf{b}_1|^2} \mathbf{a}_1$ lenne, azaz $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem lenne független, ez ellentmondás.
$\mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \mathrm{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ ✓
$\mathbf{b}_i \Rightarrow \mathbf{b}_{i+1}$: az $\mathbf{a}_{i+1}$ vektornak a $\mathrm{span}(\frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}, \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|}, \dots, \frac{\mathbf{b}_i}{|\mathbf{b}_i|})$ altérre merőleges összetevője legyen $\mathbf{b}_{i+1}$

$$\mathbf{b}_{i+1} := \mathbf{a}_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} \frac{\langle \mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}_j \rangle}{|\mathbf{b}_j|^2} \mathbf{b}_j$$

$\mathbf{b}_{i+1} \neq \mathbf{0}$, különben $\mathbf{a}_{i+1}$ nem volna független az $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i\}$ vektorrendszertől, azaz $\mathcal{A}$ nem volna független.
$\mathbf{b}_{i+1} \in \mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i+1})$, $\mathbf{a}_{i+1} \in \mathrm{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i+1}) \rightsquigarrow (6)$ ✓

Gram–Schmidt-ortogonalizáció: 1. példa

P Ortogonalizáljuk a $\{(3,6,2),(1,9,-4),(1,2,3)\}$ vektorrendszert! Adjuk meg a tér ortonormált bázisát is!

M $\mathbf{b}_1 = (3,6,2)$

$$\mathbf{b}_2 = (1,9,-4) - \frac{(1,9,-4)\cdot(3,6,2)}{(3,6,2)\cdot(3,6,2)}(3,6,2) = (-2,3,-6)$$

$$\mathbf{b}_3 = (1,2,3) - \frac{(1,2,3)\cdot(3,6,2)}{(3,6,2)\cdot(3,6,2)}(3,6,2) - \frac{(1,2,3)\cdot(-2,3,-6)}{(-2,3,-6)\cdot(-2,3,-6)}(-2,3,-6) = \frac{1}{7}(-6,2,3)$$

Az ONR:

$$\left\{\frac{1}{7}(3,6,2), \frac{1}{7}(-2,3,-6), \frac{1}{7}(-6,2,3)\right\}$$

Gram–Schmidt-ortogonalizáció: 2. példa

P Keressünk ortonormált bázist az $(1,1,1,1)$, $(3,-1,3,-1)$, $(6,2,2,-2)$ vektorok által kifeszített altérben.

M OR:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= (1,1,1,1)\\
\mathbf{b}_2 &= (3,-1,3,-1) - \frac{(3,-1,3,-1)\cdot(1,1,1,1)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)}(1,1,1,1) = (2,-2,2,-2)\\
\mathbf{b}_3 &= (6,2,2,-2) - \frac{(6,2,2,-2)\cdot(1,1,1,1)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)}(1,1,1,1)\\
&\qquad - \frac{(6,2,2,-2)\cdot(2,-2,2,-2)}{(2,-2,2,-2)\cdot(2,-2,2,-2)}(2,-2,2,-2) = (2,2,-2,-2)
\end{aligned}$$

Az ONR (ONB):

$$\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Gram–Schmidt-ortogonalizáció: 3. példa

P Keressünk ortonormált bázist az $(1,1,1,1)$, $(3,-1,3,-1)$, $(4,0,4,0)$, $(6,2,2,-2)$ vektorok által kifeszített altérben.

M OR:

$$\mathbf{b}_1 = (1,1,1,1)$$

$$\mathbf{b}_2 = (3,-1,3,-1) - \frac{(3,-1,3,-1)\cdot(1,1,1,1)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)}(1,1,1,1) = (2,-2,2,-2)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3 = (4,0,4,0) &- \frac{(4,0,4,0)\cdot(1,1,1,1)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)}(1,1,1,1) \\ &- \frac{(4,0,4,0)\cdot(2,-2,2,-2)}{(2,-2,2,-2)\cdot(2,-2,2,-2)}(2,-2,2,-2) = (0,0,0,0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3 = (6,2,2,-2) &- \frac{(6,2,2,-2)\cdot(1,1,1,1)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)}(1,1,1,1) \\ &- \frac{(6,2,2,-2)\cdot(2,-2,2,-2)}{(2,-2,2,-2)\cdot(2,-2,2,-2)}(2,-2,2,-2) = (2,2,-2,-2)\end{aligned}$$

ONR, mint az előző példában.

Euklideszi terek izomorfizmusa

T L! $\mathcal{V}$ egy valós n-dimenziós euklideszi tér. Ekkor létezik olyan $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$ izomorfizmus, mely skalárszozattartó is, azaz amelyre $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v})$ (itt $\cdot$ a standard skalárszorzás).

B $\mathcal{V}$ egy bázisát ortogonalizálva kapjuk $\mathcal{V}$ egy $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ ONB-át. Ezen előírunk egy f függvényt, mely kiterjeszthető lineáris leképezéssé: $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n; \mathbf{b}_i \mapsto f(\mathbf{b}_i) = \mathbf{e}_i$.

$\operatorname{Im} f = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \dim \operatorname{Ker} f = n - n = 0 \rightsquigarrow f$ izom.

A $\mathcal{V}$-beli $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{b}_i$, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{b}_i$ vektorokra:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i,j} u_i v_j \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = \sum_i u_i v_i = (u_1, \dots, u_n) \cdot (v_1, \dots, v_n)$$

$$= \left(\sum_i u_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_j v_j \mathbf{e}_j \right) = f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}).$$

Néhány következmény

m Tehát minden végesdimenziós valós euklideszi tér azonosítható a standard skalárszorzattal ellátott $\mathbb{R}^n$ euklideszi térrel. Így az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térre bizonyított állítások igazak maradnak!

T CBS-egyenlőtlenség L! $\mathcal{V}$ végesdimenziós valós euklideszi tér. Ekkor tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorokra

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|. \tag{7}$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan összefüggők, azaz $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$.

T Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|,$$

egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{u} \upuparrows \mathbf{v}$.

További következmények

T Bármely $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$ altér ONB-a kiegészíthető $\mathbb{R}^n$ ONB-ává.

B Kiegészítjük a $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\} \subset \mathcal{W}$ ONB-t az $\mathbb{R}^n$ bázisává:
$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$,
majd azon elvégezzük a Gram–Schmidt-eljárást: ez $\mathcal{W}$ ONB-át helyben hagyja: $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$

További következmények

K L! $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$:

1. $\mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp = \mathbb{R}^n$,
2. $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$.

B
1. L! $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ a fent megkonstruált bázis, így $\mathcal{W} = \mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$.

   Á $\mathcal{W}^\perp = \mathrm{span}(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$

   $\mathcal{W}^\perp \geqslant \mathrm{span}(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$ nyilvánvaló $\rightsquigarrow \mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp = \mathbb{R}^n$,

   másrészt $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{\mathbf{0}\} \rightsquigarrow \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp = \mathbb{R}^n$
2. $(\mathcal{W}^\perp)^\perp \geqslant \mathcal{W}$ ✓

   $\dim(\mathcal{W}) + \dim(\mathcal{W}^\perp) = n$, $\dim(\mathcal{W}^\perp) + \dim((\mathcal{W}^\perp)^\perp) = n \rightsquigarrow$
   $\dim(\mathcal{W}) = \dim((\mathcal{W}^\perp)^\perp) \rightsquigarrow (\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$.

QR-felbontás

QR-felbontás

Szemiortogonális mátrixok

Ortogonális és szemiortogonális mátrixok

D Egy valós négyzetes mátrix ortogonális, ha oszlopvektorai vagy sorvektorai ONR-t alkotnak. Ha nem kötjük ki, hogy a mátrix négyzetes legyen, szemiortogonális mátrixról beszélünk.

m Szerencsétlen szóhasználat (ortogonális – ortonormált).

m Minden ortogonális mátrix szemiortogonális is.

m Egy nem négyzetes mátrixnál vagy csak a sorai, vagy csak az oszlopai alkothatnak ONR-t, négyzetesnél mindkettő (bizonyítjuk).

m Az egységmátrix és minden permutációmátrix ortogonális.

P Melyek ortogonálisak és melyek szemiortogonálisak?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

M Mindhárom mátrix szemiortogonális, **C** ortogonális.

Szemiortogonális mátrixok

T Legyen $m \geq n$ és $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\mathbf{Q}$ szemiortogonális,
2. $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.

m Ha $m \leq n$, $\mathbf{Q}$ pontosan akkor szemiortogonális, ha $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_m$.

m A 2. állítás algebrai nyelven azt mondja, hogy $m \geq n$ esetén $\mathbf{Q}$ pontosan akkor szemiortogonális, ha transzponáltja a bal oldali inverze.

QR-felbontás

QR-felbontás és a GS-ortogonalizáció

QR-felbontás definíciója

m elemi sorműveletekkel háromszögalakra hozás $\to$ LU-felbontás ortogonalizációs eljárás eredménye $\to$ QR-felbontás

D Legyen $\mathbf{A}$ egy teljes oszloprangú mátrix. Az $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ felbontást QR-felbontásnak vagy redukált QR-felbontásnak nevezzük, ha $\mathbf{Q}$ az $\mathbf{A}$-val azonos méretű szemiortogonális mátrix, és $\mathbf{R}$ négyzetes felső háromszögmátrix, főátlójában pozitív elemekkel.

m A $\mathbf{Q}$ mátrixot új oszlopvektorok hozzávételével kiegészítjük egy ortogonális mátrixszá, az $\mathbf{R}$ mátrixot zérussorok hozzávételével egy $m \times n$-es felső háromszögmátrixszá, akkor ezek szorzata is $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \hat{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} = \mathbf{QR} + \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{O} = \mathbf{QR}.$$

Ez a teljes QR-felbontás (másutt ezt a QR-felbontás). Itt $\mathbf{A}$-t egy ortog. és egy $\mathbf{A}$-val azonos méretű felső háromszögm. szorzata.

A QR-felbontás létezése és egyértelműsége

T Bármely valós, teljes oszloprangú $\mathbf{A}$ mátrixnak létezik QR-felbontása, azaz létezik egy szemiortogonális $\mathbf{Q}$ mátrix és egy $\mathbf{R}$ felső háromszögmátrix pozitív főátlóbeli elemekkel, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$. Az így kapott felbontás egyértelmű.

B L! $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ \ldots\ \ \mathbf{a}_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ($\mathbf{A}$ teljes oszloprangú $\rightsquigarrow k \leq n$).
Létezés: Az ortogonalizáció egységvektorait jelölje $\mathbf{q}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$), tehát $\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i) = \operatorname{span}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_i)$. Így léteznek olyan r_{ij} skalárok, hogy

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= r_{11}\mathbf{q}_1 \\
\mathbf{a}_2 &= r_{12}\mathbf{q}_1 + r_{22}\mathbf{q}_2 \\
&\ \ \vdots \\
\mathbf{a}_k &= r_{1k}\mathbf{q}_1 + r_{2k}\mathbf{q}_2 + \cdots + r_{kk}\mathbf{q}_k.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Ezt mátrixszorzat-alakba írva

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{kk} \end{bmatrix} = \mathbf{QR}.$$

A Gram–Schmidt-eljárásból az is látható, hogy $r_{ii} = |\mathbf{b}_i| \rightsquigarrow r_{ii} > 0$.

R kiszámolása: $\mathbf{A} = \mathbf{QR} \rightsquigarrow \mathbf{Q}^\top\mathbf{A} = \mathbf{Q}^\top\mathbf{QR} = \mathbf{I}_k\mathbf{R} = \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{R} = \mathbf{Q}^\top\mathbf{A}$.

Egyértelműség: Tfh $\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}}$, ahol $\mathbf{Q}^\top\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}^\top\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{I}$.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}^\top\mathbf{A} &= (\mathbf{QR})^\top\mathbf{QR} = \mathbf{R}^\top\mathbf{Q}^\top\mathbf{QR} = \mathbf{R}^\top\mathbf{R}, \\ \mathbf{A}^\top\mathbf{A} &= (\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}})^\top\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^\top\hat{\mathbf{Q}}^\top\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^\top\hat{\mathbf{R}}. \end{aligned}\right. \rightsquigarrow \mathbf{R}^\top\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}}^\top\hat{\mathbf{R}} \rightsquigarrow (\hat{\mathbf{R}}^{-1})^\top\mathbf{R}^\top = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1}.$$

A bal oldal alsó, a jobb oldal felső háromszögmátrix $\rightsquigarrow$ mindkét szorzat diagonális. Jelölje $\mathbf{R}$ (ill. $\hat{\mathbf{R}}$) főátlója elemeit r_i (ill. $\hat{r}_i$).
$\frac{r_i}{\hat{r}_i} = \frac{\hat{r}_i}{r_i} \rightsquigarrow r_i = \hat{r}_i$ ($r_i > 0$ és $\hat{r}_i > 0$ miatt) $\rightsquigarrow (\hat{\mathbf{R}}^{-1})^\top\mathbf{R}^\top = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I} \rightsquigarrow$
$\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}} \rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{QR} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}}$ miatt $\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}$.

QR-felbontás GS-ortogonalizációból

P Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását.

M A GS második példában a $(1,1,1,1)$, $(3,-1,3,-1)$, $(6,2,2,-2)$ bázisból az ONB: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Valóban,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

m A Matlab/Octave programok nem biztosítják, hogy R főátlójában pozitív elemek legyenek.

Á Ha $\mathsf{A} = \mathsf{Q}'\mathsf{R}'$, ahol Q' szemiortogonális, de R' főátlójában az i-edik elemek negatívak, ahol $i \in \mathcal{I}$ és $\mathcal{I}$ egy indexhalmaz, akkor R' i-edik sorát és Q' i-edik oszlopát -1-gyel szorozva minden $i \in \mathcal{I}$-re az A QR-felbontását kapjuk.

B $\mathsf{A} = \mathsf{Q}'\mathsf{R}' = \mathsf{Q}'\mathsf{E}\mathsf{E}\mathsf{R}'$, ahol E az I-ből az i-edik elem -1-re változtatásával kapható ($i \in \mathcal{I}$).

QR-felbontás

Egyenletrendszer megoldása

Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással

T Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ teljes oszloprangú, $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ egy QR-felbontása, és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyetlen sortérbe eső optimális megoldása $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, ami megkapható az

$$\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$$

egyenletrendszerből egyszerű visszahelyettesítéssel is.

B A normálegyenletből indulva

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} && \mathbf{A} = \mathbf{QR} \text{ behelyettesítése után}\\
(\mathbf{QR})^\mathsf{T}\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{QR})^\mathsf{T}\mathbf{b} &&\\
\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b} && \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}\\
\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b} && \text{balról szorzás az } (\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1} \text{ mátrixszal}\\
\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}.
\end{aligned}$$

K Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ teljes oszloprangú, akkor $\mathbf{A}^+ = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$.

Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással

P Oldjuk meg QR-felbontással:

$$\begin{aligned} x + 3y + 6z &= 8 \\ x - y + 2z &= 2 \\ x + 3y + 2z &= 2 \\ x - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

QR-felbontás: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$

$\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$: $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

Megoldás visszahelyettesítéssel: $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (1, 0, 1)$.

Ortogonális mátrixok

Ortogonális mátrixok

T Legyen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\mathbf{Q}$ oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak.
2. $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.
3. $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\top$.
4. $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{I}_n$.
5. $\mathbf{Q}$ sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak.

B $1 \Rightarrow 2$: az előző állításban láttuk.

$2 \Rightarrow 3$: $\mathbf{Q}$ négyzetes $\rightsquigarrow$ $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ miatt $\mathbf{Q}$ invertálható $\rightsquigarrow$ $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\top$.

$3 \Rightarrow 4$: $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\top \rightsquigarrow \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{I}_n$.

$4 \Rightarrow 5$: $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{I}_n$ (sorvektorszor-oszlopvektor) $\rightsquigarrow$ $\mathbf{Q}$ soravektorai ONB-t alkotnak.

$5 \Rightarrow 1$: Bizonyítottuk, hogy $1 \Rightarrow 5$. Alkalmazzuk ezt $\mathbf{Q}^\top$-ra.

Ortogonális mátrix inverze a transzponáltja

- Számítsuk ki az

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

mátrixok inverzét!

M Mindhárom mátrix ortogonális, tehát az inverzek:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ortogonális mátrixhoz tartozó mátrixleképezés

T Legyen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\mathbf{Q}$ ortogonális.
2. $|\mathbf{Qx}| = |\mathbf{x}|$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra.
3. $\mathbf{Qx} \cdot \mathbf{Qy} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra.

B $1 \Rightarrow 2$: Ha $\mathbf{Q}$ ortogonális, akkor minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$|\mathbf{Qx}|^2 = \mathbf{Qx} \cdot \mathbf{Qx} = (\mathbf{Qx})^\mathsf{T}(\mathbf{Qx}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Qx} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2.$$

$2 \Rightarrow 3$: Mivel $|\mathbf{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y})| = |\mathbf{x}+\mathbf{y}|$ és $|\mathbf{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})| = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, ezért minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$\begin{aligned}\mathbf{Qx} \cdot \mathbf{Qy} &= \frac{1}{4}\left(|\mathbf{Qx}+\mathbf{Qy}|^2 - |\mathbf{Qx}-\mathbf{Qy}|^2\right) = \frac{1}{4}\left(|\mathbf{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y})|^2 - |\mathbf{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2\right) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\end{aligned}$$

$3 \Rightarrow 1$: $\mathbf{q}_i = \mathbf{Qe}_i$ jelöléssel $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \mathbf{Qe}_i \cdot \mathbf{Qe}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

Ortogonális mátrix további tulajdonságai

T
1. Ha $\mathbf{Q}$ valós ortogonális mátrix, akkor $|\det(\mathbf{Q})| = 1$.
2. Az $n \times n$-es valós ortogonális mátrixok $O(n)$ halmazából nem vezet ki a mátrixszorzás és invertálás művelete.

B
1. $\det(\mathbf{Q}^\mathsf{T})\det(\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{I}) = 1$, $\det(\mathbf{Q}^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{Q}) \rightsquigarrow$ $\det(\mathbf{Q}) = 1$ vagy $\det(\mathbf{Q}) = -1$.
2. $\mathbf{Q}$ ortogonális $\rightsquigarrow \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}$, ami ortogonális
   $\mathbf{Q}_1$ és $\mathbf{Q}_2$ ortogonális $\rightsquigarrow (\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2)^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}$,
   $\rightsquigarrow \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ ortogonális.

m A második állítás azt jelenti, hogy $O(n)$ elemei csoportot alkotnak a mátrixszorzásra nézve.

m Az $n \times n$-es 1 determinánsú valós ortogonális mátrixok halmazából sem vezet ki a mátrixszorzás és invertálás művelete, tehát e mátrixok is csoportot alkotnak, e csoport jele $SO(n)$.

Ortogonális mátrixok

A 2- és 3-dimenziós tér ortogonális transzformációi

A sík ortogonális transzformációi

T Minden $O(2)$-be eső ortogonális mátrix vagy egy forgatás, vagy egy egyenesre való tükrözés mátrixa.

B Ha $\mathbf{Q} = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right]$ ortogonális, akkor $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0. \end{cases}$

$\rightsquigarrow a^2c^2 = b^2d^2 \rightsquigarrow a^2(1-d^2) = (1-a^2)d^2 \rightsquigarrow a^2 = d^2, b^2 = c^2$
$\rightsquigarrow d = a$ és $c = -b$ (ekkor $\det(\mathbf{Q}) = ad - bc = 1$), vagy
$d = -a$ és $c = b$ (ekkor $\det(\mathbf{Q}) = -1$).
$\alpha \in [0, 2\pi)$ egyértelmű, melyre $a = \cos\alpha$ és $b = \sin\alpha$.

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{vagy} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

egy α szögű forgatás, és egy $\alpha/2$ szögű egyenesre való tükrözés mátrixa.

A forgástengely meghatározása

m $SO(3)$ minden eleme forgatás mátrixa, $O(3) - SO(3)$ eleme egy origóra való tükrözés és egy forgatás szorzata.

P Az 1 determinánsú ortogonális

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 14 & -5 & 2 \\ 5 & 10 & -10 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

mátrix milyen tengely körüli és mekkora szöggel való forgatás mátrixa?

M A forgástengely irányvektorára $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, azaz $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Innen a forgástengely:

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 5 & -5 & -10 \\ 2 & 10 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Forgásszög: egy $\mathbf{v}$-re merőleges vektort képével (pl. $\mathbf{w} = (0, 1, 0)$):

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 14 & -5 & 2 \\ 5 & 10 & -10 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cos\alpha = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{A}\mathbf{w}}{|\mathbf{w}||\mathbf{A}\mathbf{w}|} = \frac{2}{3}.$$

Ortogonális mátrixok

Primitív ortogonális transzformációk

m Az n-dimenziós tér forgatásai és tükrözései közül kiválaszthatunk olyan egyszerű, ún. primitív ortogonális transzformációkat, melyek mátrixai szorzataként az összes ortogonális mátrix előállítható.

D Givens-forgatás: két koordinátatengely által kifeszített síkban való forgatás a többi koordinátatengely helyben hagyása mellett. Mátrixa

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \cos\alpha & \dots & -\sin\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \sin\alpha & \dots & \cos\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Givens-forgatás

P Keressük meg azt a forgatást, mely az (a, b) vektort az $(r, 0)$-ba viszi, ahol $r^2 = a^2 + b^2$.

M $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}.$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\alpha = a/r \qquad \begin{bmatrix} a/r & b/r \\ -b/r & a/r \end{bmatrix}$$

$$\sin\alpha = -b/r$$

m Egy ilyen részmátrixot tartalmazó **G** Givens-forgatással elérhető, hogy egy **X** mátrix egy eleme helyén 0 legyen a **GX**-ben. (ritka mátrixok, párhuzamosítható számítások)

m $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ kiszámítása a túl- vagy alulcsordulás elkerülésével

$a \geqslant b$ esetén: $r = |a|\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$

Householder-tükrözés

D Householder-tükrözés: hipersíkra való tükrözés. Mátrixa ($\mathbf{a}$ normálvekorral)

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^\top\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\top$$

Á $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, akkor az $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\perp$ hipersíkra való Householder-tükrözés az $\mathbf{a}$ vektort $\mathbf{b}$-be viszi és viszont.

B A tükrözés mátrixa: $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\top(\mathbf{a}-\mathbf{b})}(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\top$.
Mivel $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, ezért $\mathbf{a}^\top\mathbf{a} = \mathbf{b}^\top\mathbf{b}$, továbbá $\mathbf{a}^\top\mathbf{b} = \mathbf{b}^\top\mathbf{a}$, így
$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\top(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}^\top\mathbf{a} - \mathbf{a}^\top\mathbf{b} - \mathbf{b}^\top\mathbf{a} + \mathbf{b}^\top\mathbf{b} = 2(\mathbf{a}^\top\mathbf{a} - \mathbf{b}^\top\mathbf{a}) = 2(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\top\mathbf{a}$.

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow \qquad \mathbf{H}\mathbf{a} &= \mathbf{a} - \frac{2}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\top(\mathbf{a}-\mathbf{b})}(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\top\mathbf{a}\\ &= \mathbf{a} - \frac{1}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\top\mathbf{a}}(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\top\mathbf{a}(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}$, ezért $\mathbf{H}\mathbf{b} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{a}$.

Householder-tükrözés

P Határozzuk meg azt a $\mathbf{H}$ mátrixot, mely az $(1,-1,-1,1)$ vektort a $(2,0,0,0)$-ba viszi.

M Az $(1,-1,-1,1)-(2,0,0,0)=(-1,-1,-1,1)$ vektorra merőleges hipersíkra való tükrözés mátrixa

$$\mathbf{H}=\mathbf{I}-\frac{2}{\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathsf{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&1&1&-1\\1&1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&-1&1\\-1&-1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

Valóban, $\mathbf{H}\cdot(1,-1,-1,1)=(2,0,0,0)$.

A Givens-forgatás és a Householder-tükrözés alkalmazásai

- Givens-forgatás
  - mátrixelemek eliminálására pl. QR-felbontásnál
  - párhuzamosítható
  - ritka mátrixok esetén hatékonyabb a Householder-tükrözésnél
- Householder-tükrözés
  - QR-felbontás numerikus kiszámításához (a Gram–Schmidt-eljárás instabil)
  - szimmetrikus mátrix hozzá ortogonálisan hasonló tridiagonális alakjának kiszámításához
  - szimmetrikus mátrix Hessenberg (a subdiagonális alatt minden elem 0) alakra hozásánál

Ortogonális mátrixok

QR-felbontás primitív ortogonális transzformációkkal

P Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 3 & 10 & 6 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

M az első és második sorokat és oszlopokat figyelve elimináljuk a második sor első elemét: $a = 4$, $b = 3$, tehát $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\cos\alpha = 4/5$, $\sin\alpha = -3/5$.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q_1 A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Következő lépésben a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrix harmadik sorának második elemét elimináljuk:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/13 & 12/13 \\ 0 & -12/13 & 5/13 \end{bmatrix}. \qquad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 13 & 12 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

és innen

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2^T = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/13 & 36/65 \\ 3/5 & 4/13 & -48/65 \\ 0 & 12/13 & 5/13 \end{bmatrix},$$

amely mátrixokkal $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ valóban fennáll.

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel

- Ötlet:

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \to Q_1A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \to Q_2Q_1A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = H_1 \qquad Q_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & H_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

$$\to Q_3Q_2Q_1A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{H_3}} \\ 0 & 0 & & \end{array}\right]$$

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel

P Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Householder-módszerrel!

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel – megoldás

M Az $(1, 2, -2) \mapsto (3, 0, 0)$ transzformációhoz az

$$\mathbf{a} = (1, 2, -2) - (3, 0, 0) = (-2, 2, -2)$$

vektorral Householder-tükrözést végzünk:

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}_3 - \frac{2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel

Ezután a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrixból képzeletben elhagyva az első sort és oszlopot a $(4,3) \mapsto (5,0)$ transzformációhoz kell az $\mathbf{a} = (4,3) - (5,0) = (-1,3)$ vektorral Householder-tükrözést végezni:

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{I}_2 - \frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \end{array}\right], \qquad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2^\mathsf{T} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 14 \\ 10 & 10 & -5 \\ -10 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Komplex euklideszi tér

Mi lehet a skaláris szorzás $\mathbb{C}^n$-ben?

- A $\sum_i z_i w_i$ nem működik:

$$(1, \mathrm{i}) \cdot (1, \mathrm{i}) \stackrel{?}{=} 1 - 1 = 0$$

$$(\mathrm{i}, \mathrm{i}) \cdot (\mathrm{i}, \mathrm{i}) \stackrel{?}{=} -1 - 1 = -2$$

- Ötletadó kérdés: az 1-dimenziós térben mi az abszolút érték? A $z = a + \mathrm{i}b$ szám abszolút értékének négyzete $z\bar{z}$, és nem z^2! Eszerint $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ és a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ vektorok skaláris szorzatának egy lehetséges definíciója

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \cdots + z_n\overline{w_n}, \text{ vagy}$$

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \overline{z_1}w_1 + \overline{z_2}w_2 + \cdots + \overline{z_n}w_n.$$

Komplex mátrix adjungáltja

D Az $\mathbf{A}$ komplex mátrix adjungáltján (vagy Hermite-féle transzponáltján) elemenkénti konjugáltjának transzponáltját értjük. Az $\mathbf{A}$ adjungáltját $\mathbf{A}^*$, vagy Hermite neve után $\mathbf{A}^\mathsf{H}$ jelöli, tehát $\mathbf{A}^\mathsf{H} = \overline{\mathbf{A}}^\mathsf{T}$.

m semmi köze a „klasszikus adjungálthoz”!

P $\begin{bmatrix} i & 1+i \\ -i & 2 \end{bmatrix}^\mathsf{H} = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$, $[1-i \ \ i]^\mathsf{H} = \begin{bmatrix} 1+i \\ -i \end{bmatrix}$.

T Az adjungált tulajdonságai Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ komplex mátrixok, c komplex szám. Ekkor

1. $(\mathbf{A}^\mathsf{H})^\mathsf{H} = \mathbf{A}$,
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\mathsf{H} = \mathbf{A}^\mathsf{H} + \mathbf{B}^\mathsf{H}$,
3. $(c\mathbf{A})^\mathsf{H} = \overline{c}\mathbf{A}^\mathsf{H}$
4. $(\mathbf{A}\mathbf{B})^\mathsf{H} = \mathbf{B}^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}$.

m A valós transzponálás kiterjesztése.

D Komplex vektorok skaláris szorzata A $\mathbb{C}^n$-beli $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ vektorok skaláris szorzatán a $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} := \overline{z_1}w_1 + \overline{z_2}w_2 + \cdots + \overline{z_n}w_n = \mathbf{z}^{\mathsf{H}}\mathbf{w}$ komplex skalárt értjük.

P $(1, \mathrm{i})$ és (i, i) szorzatai:

$$
\begin{aligned}
(1, \mathrm{i}) \cdot (1, \mathrm{i}) &= \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = 1 - \mathrm{i}^2 = 2, \\
(\mathrm{i}, \mathrm{i}) \cdot (\mathrm{i}, \mathrm{i}) &= \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = -\mathrm{i}^2 - \mathrm{i}^2 = 2, \\
(1, \mathrm{i}) \cdot (\mathrm{i}, \mathrm{i}) &= \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = 1 + \mathrm{i}, \\
(\mathrm{i}, \mathrm{i}) \cdot (1, \mathrm{i}) &= \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = -\mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = 1 - \mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

A komplex skaláris szorzás tulajdonságai

T Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, és legyen $c \in \mathbb{C}$. Ekkor

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,
3. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \overline{c}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ és $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$, ha $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

m Kiterjesztése a valós skaláris szorzatnak!

m A harmadik tulajdonságban felsoroltak bármelyike következik a másikból az első alapján.

m Komplex vektor önmagával vett skaláris szorzata valós!

Komplex euklideszi tér

D L! $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ egy vektortér, és $\langle .,. \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ olyan függvény, melyre bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ vektorok és $c \in \mathbb{C}$ skalár esetén

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} && \text{konjugált szimmetria} \\ \langle \mathbf{u}, c\mathbf{v} \rangle &= c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle && \text{homogenitás a 2. változóban} \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle && \text{additivitás} \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &> 0, \text{ ha } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} && \text{pozitivitás} \end{aligned}$$

E $\langle .,. \rangle$ függvényt a $\mathcal{V}$-n értelmezett komplex skaláris szorzásnak, a skaláris szorzással ellátott $\mathcal{V}$ vektorteret komplex euklideszi térnek, vagy $\mathbb{C}$ fölötti euklideszi térnek nevezzük.

Komplex euklideszi tér

- Az első változóban a szorzás nem homogén, hisz

$$\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, c\mathbf{u}\rangle} = \overline{c\,\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle} = \bar{c}\overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle} = \bar{c}\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\,.$$

  A komplex skaláris szorzás az első változóban nem lineáris, hanem ún. konjugált lineáris. Maga a komplex skaláris szorzás így nem bilineáris (hanem ún. szeszkvilineáris, vagy másféllineáris).
- A komplex skaláris szorzás definíciója a valós skaláris általánosítása, annak nem mond ellent.

Távolság és a merőleges vetítés komplex terekben

D Komplex vektorok hossza, távolsága, merőlegessége A komplex $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ vektor hossza, abszolút értéke vagy normája $\|\mathbf{u}\| = |\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$, két vektor távolsága megegyezik különbségük hosszával, azaz $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ vektorok esetén $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$.

Két vektort merőlegesnek tekintünk, ha skaláris szorzatuk 0.

Két vektor szöge nem definiálható a szokásos módon.

T Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség: L! $\mathcal{V}$ komplex euklideszi tér. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vektorokra

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan összefüggők, azaz ha egyik vektor a másik skalárszorosa.

B A valós bizonyítás mintájára. $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ esetén ✓

Ha $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, akkor

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \left| \mathbf{x} - \frac{\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{|\mathbf{y}|^2} \mathbf{y} \right|^2 \\
&= \left\langle \mathbf{x} - \frac{\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{|\mathbf{y}|^2} \mathbf{y}, \mathbf{x} - \frac{\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{|\mathbf{y}|^2} \mathbf{y} \right\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \frac{\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{|\mathbf{y}|^2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{y}|^2} \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{|\mathbf{y}|^4} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= |\mathbf{x}|^2 - \frac{| \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle |^2}{|\mathbf{y}|^2}
\end{aligned}
$$

- Átrendezés után a képlet igazolva ✓

Unitér mátrixok

m Az ortogonális mátrixok komplex analogonjai az unitér mátrixok.

D Unitér mátrix Egy komplex négyzetes $\mathbf{U}$ mátrix unitér, ha $\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U} = \mathbf{I}$.

m Az ortogonális mátrixokhoz hasonlóan bizonyítható, hogy egy $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor unitér, ha az alábbiak bármelyike teljesül:

1. $\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{I}$,
2. $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}$,
3. $\mathbf{U}$ oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
4. $\mathbf{U}$ sorvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
5. $|\mathbf{U}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra,
6. $\mathbf{U}\mathbf{x} \cdot \mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Komplex mátrix kitüntetett alterei

m Komplex mátrixok szorzatában NEM sorvektor és oszlopvektor skaláris szorzata szerepel!

m $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbb{C}^n = \mathcal{S}(\bar{\mathbf{A}}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$ $\mathbb{C}^m = \mathcal{O}(\bar{\mathbf{A}}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$

T Komplex mátrix kitüntetett alterei Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, akkor

1. $\mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{H})$,
2. $\mathbb{C}^n = \mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathbb{C}^m = \mathcal{O}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{H})$,

K Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ négyzetes mátrixra ekvivalensek a következők:

1. $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$,
2. $\mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H}) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$,
3. $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{H}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

m Az invertálható mátrixok mind ilyenek, hisz a nulltér csak a nullvektorból áll.

Merőleges vetítés és tükrözés egy hipersíkra

m Az $\mathbf{x}$ vektornak az $\mathbf{e}$ egységvektor egyenesére eső merőleges vetülete: $\mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})$, $\mathbf{x}$ rá merőleges összetevője: $\mathbf{x} - \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{I} - \mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{H}})\mathbf{x}$

\- Merőleges tükrözés mátrixa $\mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{H}}$

GS-ortogonalizáció komplex terekben

P Ortogonalizáljuk az $(\mathrm{i}, 0, 0)$, $(\mathrm{i}, \mathrm{i}, \mathrm{i})$, $(\mathrm{i}, \mathrm{i}, 0)$ vektorokból álló vektorrendszert.

M $\mathbf{b}_1 = (\mathrm{i}, 0, 0)$, a továbbiakban használjuk a $\mathbf{b}_{i+1} = \mathbf{a}_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \frac{\mathbf{b}_k(\mathbf{b}_k^{\mathsf{H}}\mathbf{a}_{i+1})}{\mathbf{b}_k^{\mathsf{H}}\mathbf{b}_k}$ képletet:

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

Az ONB

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} i \\ i \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ i/2 \\ -i/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix}, \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ -i \end{bmatrix}$$

Önadjungált mátrixok

D Az A komplex mátrixot önadjungált vagy Hermite-féle mátrixnak nevezzük, ha

$$\mathsf{A}^{\mathsf{H}} = \mathsf{A}.$$

m önadjungált mátrix főátlójában csak valósok állhatnak

m Minden valós szimmetrikus mátrix önadjungált,
a komplex szimmetrikus mátrixok pontosan akkor önadjungáltak, ha minden elemük valós.

P Melyek önadjungáltak?

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 2-3i \\ 1-i & 2+3i & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$$

Ferdén önadjungált mátrixok

D $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ferdén önadjungált, ha

$$\mathsf{A} = -\mathsf{A}^{\mathsf{H}}$$

P $\begin{bmatrix} 2\mathrm{i} & 3-\mathrm{i} \\ -3-\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$ ferdén önadjungált.

Á ferdén önadjungált mátrixok főátlójában tiszta imaginárius számok állnak (a 0 is annak tekintendő).

Á ha $\mathbf{A}$ ferdén önadjungált, akkor $\mathrm{i}\mathbf{A}$ és $-\mathrm{i}\mathbf{A}$ önadjungált.

Á Minden komplex négyzetes mátrix egyértelműen előáll egy önadjungált és egy ferdén önadjungált mátrix összegeként.

B $\mathsf{A} = \mathsf{B} + \mathsf{C}$, ahol $\mathsf{B} = \frac{1}{2}(\mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{H}})$, $\mathsf{C} = \frac{1}{2}(\mathsf{A} - \mathsf{A}^{\mathsf{H}})$ és $\mathbf{B}$ önadjungált, $\mathbf{C}$ ferdén önadjungált.

Normális mátrixok

D Az adjungáltjával fölcserélhető mátrixokat normális mátrixoknak nevezzük:

$$AA^H = A^H A$$

Á Minden valós szimmetrikus, ferdén szimmetrikus és ortogonális mátrix normális. Minden komplex önadjungált, ferdén önadjungált és unitér mátrix normális.

m Van olyan mátrix, mely nem esik a fönt fölsorolt osztályokba, de normális:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad AA^H = A^H A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kapcsolatok

F $\forall \mathsf{A} \in \mathbb{C}^n$ mátrixra $\mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{H}\mathsf{A}) = \mathcal{N}(\mathsf{A})$ és $\mathcal{O}(\mathsf{A}^\mathsf{H}\mathsf{A}) = \mathcal{O}(\mathsf{A}^\mathsf{H})$.

Á {valós szimmetrikus} $\subset$ {önadjungált} $\subset$ {normális} $\subset$ {nulltér $\perp$ oszloptér}

B A $\subseteq$ relációk közül csak az utolsó nem trivi: Tudjuk, hogy $\mathcal{O}(\mathsf{A}) = \mathcal{O}(\mathsf{A}\mathsf{A}^\mathsf{H}) = \mathcal{O}(\mathsf{A}^\mathsf{H}\mathsf{A}) = \mathcal{O}(\mathsf{A}^\mathsf{H})$, ami ekvivalens azzal, hogy $\mathcal{O}(\mathsf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathsf{A})$.

Azt, hogy mindegyik tartalmazás valódi, példákkal igazoljuk:

$\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$ önadjungált, de nem szimmetrikus

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (ferdén szimmetrikus) nem önadjungált, de normális

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ nem normális, de invertálható $\rightsquigarrow$ nulltér $\perp$ oszloptér

Feladatok

- F Mutassuk meg, hogy ha $\mathsf{A} \in \mathsf{C}^{n\times n}$ önadjungált és $\mathsf{U} \in \mathsf{C}^{n\times n}$ unitér mátrixok, akkor $\mathsf{U}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{U}$ önadjungált!
- F Legyen $\mathsf{S} \in M_n[\mathbb{R}]$ szimmetrikus, $\mathsf{H} \in M_n[\mathbb{C}]$ önadjungált mátrix. Mutassuk meg, hogy minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, ill. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektorra $(\mathsf{S}\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathsf{S}\mathbf{y})$, ill. $(\mathsf{H}\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathsf{H}\mathbf{y})$!
- F Mutassuk meg, hogy az $H : \mathbf{x} \mapsto \mathsf{H}\mathbf{x}$ leképezés egy tetszőleges $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó $\mathsf{H}_{\mathcal{B}}$ mátrixa nem szükségképpen önadjungált (adjunk egy egyszerű példát), de az $\mathsf{H}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathsf{H}\mathbf{y}$ egyenlőség a vektorok e bázisbeli koordinátás alakját használva is igazak maradnak!