BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Bevezetés az algebrába 2

BMETE91AM37

Lineáris leképezések

H607 – 2017-02-06, 08, 10

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Vektortér

Vektortér absztrakt fogalma

D **Vektortér**

A $\mathcal{V}$ halmazt $\mathbb{F}$ fölötti *vektortérnek* nevezzük (jel.: $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$), ha tartalmaz egy $\mathbf{0}$-val jelölt elemet, és értelmezve van rajta egy összeadás és egy skalárral szorzás művelet, melyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek: ha $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ és $c, d \in \mathbb{F}$, akkor

(A1)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	az összeadás kommutatív
(A2)	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$	az összeadás asszociatív
(A3)	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	az összeadás nulleleme
(M1)	$(cd)\mathbf{u} = c(d\mathbf{u})$	a két szorzás kompatibilis
(M2)	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	szorzás a test egységelemével
(M3)	$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$	szorzás a test nullelemével
(D1)	$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$	disztributív
(D2)	$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$	disztributív.

m Összeadáson egy $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}; (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$, míg skalárral való szorzáson egy $\mathbb{F} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}; (c, \mathbf{u}) \mapsto c\mathbf{u}$ leképezést értünk.

m (A2) $\rightsquigarrow$ többtagú összeget nem kell zárójelezni $\rightsquigarrow$ az $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ jelölés egyértelmű.

Á (M3) kicserélhető a következő tulajsonsággal

(A4) $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} \exists \mathbf{v} \in \mathcal{V}\colon\ \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ additív inverz létezése

Ezt $-\mathbf{u}$ jelöli.

B (M3) $\Rightarrow$ (A4): tetszőleges $\mathbf{u}$-ra $\mathbf{0} = 0\mathbf{u} = (1-1)\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, ahol $\mathbf{v} = (-1)\mathbf{u}$.

(A4) $\Rightarrow$ (M3): $0\mathbf{u} = (0+0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} \rightsquigarrow$

$\mathbf{0} = 0\mathbf{u} + \mathbf{v} = (0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}) + \mathbf{v} = 0\mathbf{u} + (0\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0\mathbf{u} + \mathbf{0} = 0\mathbf{u}$.

m A vektortér definíciójára (A1)–(A4), (M1)–(M2), (D1)–(D2) is használható (ált. így szokták).

Á A fenti definíció nem minimális: az (A1) bizonyítható a többiből.

B $(1+1)(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ kétféle kiszámításával.

Példák vektorterekre

Á $\mathcal{V} = \{0\}$ bármely test fölött vektortér. Ezt nevezzük zérustérnek.

P $\mathbb{F}^n$ vektortér $\mathbb{F}$ fölött a szokásos elemenkénti összeadás és skalárral szorzás műveleteivel. Speciálisan $\mathbb{F}^1$ (azaz lényegében maga $\mathbb{F}$) is tekinthető $\mathbb{F}$ fölötti vektortérnek.

P $\mathbb{F}^{m\times n}$, $\mathbb{F}[x]$, $\mathbb{F}[x]_n = \{f \in \mathbb{F}[x] \mid \deg f \leqslant n\}$, $\mathbb{F}[[x]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\}$ a formális hatványsorok

P $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, és $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ az $\mathbb{R}$-en folytonos, illetve diffható függvények

P $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, a végtelen valós sorozatok

P azon $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-beliek, melyekben véges sok elemet kivéve $\forall$ elem 0

P $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$, azaz $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$ fölött

D $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ altere $\mathcal{V}$-nek, ha nem üres és zárt a műveletekre nézve. Jelölés: $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$.

Á $\mathbb{F}[x]_n \leqslant \mathbb{F}[x] \leqslant \mathbb{F}[[x]]$, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Q}} \leqslant \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$, $\{b\sqrt{2} \mid b \in \mathbb{Q}\} \leqslant \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$, $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \leqslant \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$

Függvényterek*

T Függvényterek L! $X \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, $\mathbb{F}$ test, $\mathcal{V}$ egy $\mathbb{F}$ fölötti vektortér, $\mathbb{F}^X := \{X \to \mathbb{F}\ \text{ függvények}\}$, $\mathcal{V}^X := \{X \to \mathcal{V}\ \text{ függvények}\}$. $\mathbb{F}^X$ és $\mathcal{V}^X$ vektortér $\mathbb{F}$ fölött a szokásos műveletekkel: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(cf)(x) = cf(x)$ minden $x \in X$-re.

B A zérusfüggvény a nullelem. (A1) és (M1) bizonyítása: L! $f, g \in \mathcal{V}^X$,

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) && \text{definíció szerint}\\ &= g(x) + f(x) && \text{a } \mathcal{V}\text{-beli összeadás kommutatív}\\ &= (g+f)(x) && \text{definíció szerint.}\end{aligned}$$

L! $c, d \in \mathbb{F}$, $f \in \mathcal{V}$, ekkor

$$\begin{aligned}((cd)f)(x) &= (cd)f(x) && \text{definíció szerint}\\ &= c(df(x)) && \text{a } \mathcal{V}\text{-beli skalárral szorzás kompatibilitása}\\ &= c(df)(x) && \text{definíció szerint.}\end{aligned}$$

Lineáris kombináció

L! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér és $\mathcal{A} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \ldots\}$ egy véges vagy végtelen vektorhalmaz.

D A lineáris kombináció véges $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i$ alakú összeg, ahol $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}$, $a_i \in \mathbb{F}$.

D AMH a véges vagy végtelen $\mathcal{A}$ vektorhalmaz lineárisan független, ha minden véges részhalmaza lineárisan független.

D AMH $\mathcal{A}$ generátorrendszer $\mathcal{V}$-ben (kifeszíti $\mathcal{V}$-t), ha bármely $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor előáll véges sok $\mathcal{A}$-beli lineáris kombinációjaként.

D AMH $\mathcal{A}$ a $\mathcal{V}$ egy bázisa, ha lineárisan független generátorrendszer.

P $\mathbb{F}[x]$-nek nincs véges bázisa, de $\{1, x, x^2, \ldots\}$ bázis.

P $\mathbb{F}[[x]]$-nek nem generátorrendszere $\{1, x, x^2, \ldots\}$, mert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nem áll elő véges lineáris kombinációként. Nincs megszámlálható generátorrendszere, van kontinuum független.

T Minden vektortérnek van bázisa (a zérustérnek az üreshalmaz).

Lineáris leképezések

Lineáris leképezés

D Legyen $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ két $\mathbb{F}$ test fölötti vektortér. Azt mondjuk, hogy egy $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezés lineáris, ha homogén és additív, azaz ha tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ elemre és $c \in \mathbb{F}$ skalárra

$$A(c\mathbf{x}) = cA(\mathbf{x}) \qquad (A \text{ homogén,})$$

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} \qquad (A \text{ additív.})$$

$\mathcal{V} = \mathcal{W}$ esetén lineáris transzformációnak is nevezzük.

D Képtér: $\operatorname{Im} A = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{V}\} = A$ értékkészlete (altér)
Magtér: $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} =$ azoknak a vektoroknak az altere, melyeket A a nullvektorba visz.

P A síkbeli vektorok egy rögzített O pont körüli forgatása, egy egyenesre való tükrözése és merőleges vetítése lineáris leképezés.

P A $D : f \mapsto f'$ és az $I : f \mapsto \int_a^b f$ leképezések lineáris leképezések.

Lineáris leképezés ekvivalens definíciói

Á L! $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ az $\mathbb{F}$ test fölötti vektorterek. Egy tetszőleges $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezésre az alábbi állítások ekvivalensek:

1. A lineáris, azaz homogén és additív.
2. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ és $c, d \in \mathbb{F}$ esetén
$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$$
3. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ és $c \in \mathbb{F}$ esetén
$$A(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$$
4. „Megőrzi" a lineáris kombinációt, azaz tetszőleges $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathcal{V}$ vektorokra és $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{F}$ skalárra
$$A(c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1A\mathbf{x}_1 + \cdots + c_kA\mathbf{x}_k.$$

Az $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ leképezések mátrixleképezések

T Legyen $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ egy tetszőleges függvény. Az A pontosan akkor lineáris leképezés, ha létezik egy olyan $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix, hogy az A függvény megegyezik az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezéssel. Ekkor

$$\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1 | A\mathbf{e}_2 | \dots | A\mathbf{e}_n],$$

ahol $\mathbf{e}_i$ az i-edik standard egységvektor ($i = 1, 2, \dots, n$).

B (A mátrixleképezés $\Rightarrow$ A lineáris) ✓

(A mátrixleképezés $\Leftarrow$ A lineáris)

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1A\mathbf{e}_1 + x_2A\mathbf{e}_2 + \dots + x_nA\mathbf{e}_n \\ &= \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & \dots & A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Megjegyzések

- Lineáris leképezésekről olyan esetben is beszélhetünk, amikor a leképezésnek nincs mátrixa (pl. végtelen dimenziós vektorterek esetén).
- Különbség van a lineáris leképezés és a mátrixleképezés közt $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ függvények esetén is:

  A lineáris leképezés független a bázistól, az csak maga a függvény, mely megadja, hogy melyik vektornak melyik vektor a képe.

  A mátrixleképezés mindig valamely bázisra vonatkozik. Egy lineáris leképezéshez minden bázisban tartozik egy mátrixleképezés, melynek mátrixa függ a bázistól.
- A lineáris $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ leképezések azonosak az $x \mapsto cx$ függvényekkel, ahol $c \in \mathbb{F}$ konstans.

Lineáris leképezések néhány tulajdonsága

Á L! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ és $\mathcal{W}_{\mathbb{F}}$ vektortér, $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ egy bázisa, és $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{W}$ a bázison értelmezett tetszőleges függvény. Ekkor $\exists^1 A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris leképezés, melyre $A\mathbf{b} = \varphi(\mathbf{b})$ minden $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ vektorra.

B A $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} v_i \mathbf{b}_i$ vektorra $A\mathbf{v} := \sum_{i=1}^{k} v_i \varphi(\mathbf{b}_i)$. Ez jól definiált, mert $\mathbf{v}$ felírása egyértelmű.

Az A lineáris: L! $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} u_i \mathbf{b}_i$ $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} v_i \mathbf{b}_i$ ($\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ felírásában szereplő báziselemek uniója).

$A(c\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\sum_{i=1}^{k} (cu_i + v_i)\mathbf{b}_i) = \sum_{i=1}^{k} (cu_i + v_i)\varphi(\mathbf{b}_i) =$
$c\sum_{i=1}^{k} u_i \varphi(\mathbf{b}_i) + \sum_{i=1}^{k} v_i \varphi(\mathbf{b}_i) = cA\mathbf{u} + A\mathbf{v}$

F Adjunk meg a standard mátrixával olyan $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris trafót, melyre $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A \neq \{\mathbf{0}\}$.

Lineáris leképezések néhány tulajdonsága

D Egy $f : V \to W$ függvény

1. szürjektív, ha „ráképezés”, azaz $\operatorname{Ran} f = W$,
2. injektív (egy-egyértelmű), ha $u \neq v \in V$ esetén $f(u) \neq f(v)$,
3. bijektív (kölcsönösen egyértelmű), ha injektív és szürjektív.

Á L! $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris leképezés.

1. A szürjektív $\iff \operatorname{Im} A = \mathcal{W}$.
2. A injektív $\iff \operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$.

B 1. ✓, 2.

($\Rightarrow$): $A\mathbf{u} = \mathbf{0} = A\mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

($\Leftarrow$): $A\mathbf{u} = A\mathbf{v} \rightsquigarrow \mathbf{0} = A\mathbf{u} - A\mathbf{v} = A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \rightsquigarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\} \rightsquigarrow$
$\mathbf{u} = \mathbf{v}$

Vektorterek izomorfizmusa

Izomorfizmus

D A $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezést izomorfizmusnak nevezzük, ha bijektív és lineáris. AMH a $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ vektorterek izomorfak, ha van köztük egy izomorfizmus. (A izomorfizmus $\iff$ $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$, $\operatorname{Im} A = \mathcal{W}$.) Jelölés $\mathcal{V} \simeq \mathcal{W}$.

P Legyen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subset \mathbb{R}^3$ független vektorrendszer, és $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ legyen az a lineáris leképezés, melyre $A : (1, 0) \mapsto \mathbf{u}$, $A : (0, 1) \mapsto \mathbf{v}$. Mit mondhatunk az $\mathbb{R}^2$ és a $\mathcal{V} = \operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ vektortérről?

Á 1. Ha $\mathcal{U} \xrightarrow{A} \mathcal{V} \xrightarrow{B} \mathcal{W}$, A és B izomorfizmus, akkor $B \circ A$ izomorfizmus.
2. Ha $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ izomorfizmus, akkor $\exists A^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ inverz és az lineáris.

B 2. A bijekció $\rightsquigarrow$ $\forall \mathbf{w}\, \exists^1 \mathbf{v}$: $A\mathbf{v} = \mathbf{w} \rightsquigarrow A^{-1}\mathbf{w} := \mathbf{v}$ bijekció.
A^{-1} lineáris: $A^{-1}(c\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = A^{-1}(cA\mathbf{v}_1 + A\mathbf{v}_2) = A^{-1}(A(c\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)) = c\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = cA^{-1}\mathbf{w}_1 + A^{-1}\mathbf{w}_2$.

K A vektorterek izomorfiája ekvivalenciareláció.

Véges dimenziós terek jellemzése

T Ha $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ n-dimenziós, akkor $\mathcal{V} \simeq \mathbb{F}^n$.

B L! $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bázis $\mathcal{V}$-ben, és a koordinátázó leképezés $k : \mathcal{V} \to \mathbb{F}^n; \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (v_1, \ldots, v_n)$, ha $\mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{b}_i$.

k injektív: $k(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{v} = \sum 0\mathbf{b}_i \rightsquigarrow \operatorname{Ker} k = \{\mathbf{0}\}$.

k szürjektív: $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$-re $k(\sum x_i \mathbf{b}_i) = (x_1, \ldots, x_n)$.

k lineáris: $\mathbf{u} = \sum u_i \mathbf{b}_i$, $\mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{b}_i$:
$k(c\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k(c \sum u_i \mathbf{b}_i + \sum v_i \mathbf{b}_i) = k(\sum (cu_i + v_i)\mathbf{b}_i) =$
$(cu_1 + v_1, \ldots, cu_n + v_n) = c(u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) = ck(\mathbf{u}) + k(\mathbf{v})$

Véges dimenziós terek jellemzése

K Egy végesen generált vektortér bázisának elemszáma egyértelmű (ez a tér dimenziója).

B Ha a $\mathcal{V}$ térnek van véges generátorrendszere, van véges bázisa is (elhagyjuk a függőket).

Ha $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ egy minimális méretű bázis, és van $m > n$ elemű független, akkor a $k : \mathcal{V} \to \mathbb{F}^n$ izomorfizmussal $\{k(\mathbf{v}_1), \ldots, k(\mathbf{v}_n)\}$ is független, ui.

$\mathbf{0} = \sum_i c_i k(\mathbf{v}_i) \rightsquigarrow \mathbf{0} = k(\sum_i c_i \mathbf{v}_i) \rightsquigarrow \mathbf{0} = \sum_i c_i \mathbf{v}_i \rightsquigarrow \forall i \; 0 = c_i$, mert a $\mathbf{v}_i$ vektorok függetlenek.

$\mathbb{F}^n$-ben nem létezik n-nél több elemű független rsz. ✓

K Két végesdimenziós vektortér pontosan akkor izomorf, ha azonos dimenziójúak.

Lineáris transzformáció mátrixa

Lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban

Á L! $L : \mathcal{V}_{\mathbb{F}} \to \mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ lineáris transzformáció, és $\mathcal{B}$ az n-dimenziós $\mathcal{V}$ egy bázisa. Ekkor van olyan $\mathbf{L}_{\mathcal{B}}$ mátrix, melyre $[L\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{L}_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, nevezetesen

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}} = [[L\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [L\mathbf{b}_n]_{\mathcal{B}}]$$

B L! $\mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{b}_i$, azaz $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, és L! k a koordinátázó függvény.

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [[L\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [L\mathbf{b}_n]_{\mathcal{B}}] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum v_i [L\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}} = \sum v_i k(L\mathbf{b}_i) =$$

$k(\sum v_i L\mathbf{b}_i) = k(L(\sum v_i \mathbf{b}_i)) = k(L\mathbf{v}) = [L\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$

$\mathbf{L}_{\mathcal{B}}$ egyértelmű, mert $[L\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}}$ csak $\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{e}_i$, azaz az $\mathbf{L}_{\mathcal{B}}$ i-edik oszlopa lehet.

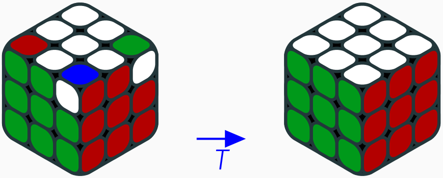
Lineáris transzformáció mátrixa különböző bázisokban

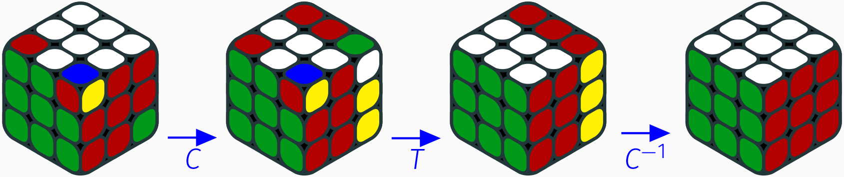
$$\begin{tikzcd}
{[\mathsf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{B}}"] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{B}}} \\
{[\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{A}}"'] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[\mathsf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{B}}"] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[d, "\mathsf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathsf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \\
{[\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{A}}"'] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}}
\end{tikzcd}$$

$$\mathsf{L}_{\mathcal{B}}\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathsf{L}_{\mathcal{A}}$$

$\mathsf{L}_{\mathcal{A}} = \mathsf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{L}_{\mathcal{B}}\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$, illetve
$\mathsf{L}_{\mathcal{A}} = \mathsf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathsf{L}_{\mathcal{B}}\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$

Valami hasonló a Rubik-kockán





$$C^{-1}TC$$

Hasonlóság

A hasonlóság fogalma

D Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}.$$

J Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

m Ha $\mathbf{A}$ hasonló $\mathbf{B}$-hez, akkor $\mathbf{B}$ is hasonló $\mathbf{A}$-hoz.

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} = \hat{\mathbf{C}}^{-1}\mathbf{B}\hat{\mathbf{C}}.$$

P $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$, mert $\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$,
vagy $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

D A $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ alakú kifejezést az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{C}$-vel való konjugáltjának nevezzük.

Mikor hasonló két mátrix?

T Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha van két olyan bázis, melyekben e két mátrix ugyanannak a lineáris transzformációnak a mátrixa.

B (L lin.trafó $\Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{L}_{\mathcal{A}} \sim \mathbf{B} = \mathbf{L}_{\mathcal{B}}$) ✓

($\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \exists L$ lin.trafó)

$\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \rightsquigarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$

Legyen $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$, ekkor

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{A}\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}.$$

L az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezés a standard bázisban, $\mathbf{B}$ az L mátrixa a $\mathcal{C}$ bázisban.

Hasonlóságra invariáns tulajdonságok

T Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor

1. $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$,
2. $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B}))$,
3. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$,
4. $\operatorname{trace}(\mathbf{A}) = \operatorname{trace}(\mathbf{B})$.

B

1. $r(\mathbf{A}) = \dim(\mathcal{O}(\mathbf{A})) = \dim(\operatorname{Im}(L)) = \dim(\mathcal{O}(\mathbf{B})) = r(\mathbf{B})$
2. $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = \dim(\operatorname{Ker}(L)) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B}))$
3. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}^{-1})\det(\mathbf{B})\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{B})$, mivel $\det(\mathbf{C})\det(\mathbf{C}^{-1}) = 1$.
4. Használjuk a $\operatorname{trace}(\mathbf{AB}) = \operatorname{trace}(\mathbf{BA})$ összefüggést:

$$\begin{aligned}\operatorname{trace}(\mathbf{A}) &= \operatorname{trace}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}) = \operatorname{trace}((\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{C}) = \operatorname{trace}(\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}) \\ &= \operatorname{trace}(\mathbf{B}).\end{aligned}$$

P Melyek hasonlóak a következő mátrixok közül?

	$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}$
rang	1	2	2	1	2	2
det	0	2	-2	0	1	2
trace	1	3	0	2	2	3

M $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2 \mapsto 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_1 \mapsto 2\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2 \mapsto \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$.

Az áttérés mátrixa: $\mathbf{b}_1 := \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 := \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \rightsquigarrow \mathbf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$.

2M Megoldhatjuk egyenletrendszerrel: $\mathbf{T} := \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, és

$$\mathbf{T}^{-1}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\mathbf{T} = \begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}, \text{ azaz } \begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\mathbf{T} = \mathbf{T}\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}$$

Lineáris leképezés mátrixa

Lineáris leképezés mátrixa bázispárban

D L! $L : \mathcal{V}_{\mathbb{F}} \to \mathcal{W}_{\mathbb{F}}$ lineáris leképezés, $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ a $\mathcal{V}$ bázisa, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ a $\mathcal{W}$ bázisa.
AMH $\mathbf{L}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$ az L mátrixa az $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bázisokra nézve (az $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bázispárban), ha $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : [L\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{L}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}}$

m A korábban tanult áttérés mátrixa nem más, mint az identikus leképezés mátrixa a két bázisra nézve, hisz e mátrix minden vektorhoz önmagát rendeli, csak egy másik bázisban fölírva.

m Koordinátázó leképezések: $k_{\mathcal{A}} : \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{A}}$, $k_{\mathcal{B}} : \mathbf{w} \mapsto [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "k_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{W} \arrow[d, "k_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"'] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd}$$

$\mathbf{L}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$ mátrixleképezése $k_{\mathcal{B}} \circ L \circ k_{\mathcal{A}}^{-1}$

Á L! $L : \mathcal{V}_{\mathbb{F}} \to \mathcal{W}_{\mathbb{F}}$ lineáris transzformáció, és $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ a $\mathcal{V}$, $\mathcal{B}$ az $\mathcal{W}$ bázisa. Ekkor

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = [[L\mathbf{a}_1]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [L\mathbf{a}_n]_{\mathcal{B}}]$$

melyre $[L\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}}$.

B L! $\mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{a}_i$, azaz $[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, és L! $k_{\mathcal{A}}$ és $k_{\mathcal{B}}$ a két koordinátázó függvény.

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = [[L\mathbf{a}_1]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [L\mathbf{a}_n]_{\mathcal{B}}] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum v_i [L\mathbf{a}_i]_{\mathcal{B}} = \sum v_i k_{\mathcal{B}}(L\mathbf{a}_i) =$$

$k_{\mathcal{B}}(\sum v_i L\mathbf{a}_i) = k_{\mathcal{B}}(L(\sum v_i \mathbf{a}_i)) = k_{\mathcal{B}}(L\mathbf{v}) = [L\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$

$\mathbf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ egyértelmű, mert $[L\mathbf{a}_i]_{\mathcal{B}}$ csak $\mathbf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{e}_i$, azaz az $\mathbf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ i-edik oszlopa lehet.

Lineáris leképezés mátrixa különböző bázispárokban

$$\begin{tikzcd}
{[\mathsf{x}]_{\mathcal{A}'}} \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}"] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{B}'}} \arrow[d, "\mathsf{D}^{-1}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}"] \\
{[\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathsf{C}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"'] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{B}}}
\end{tikzcd}$$

- Áttérések: $[\mathsf{x}]_{\mathcal{A}'} = \mathsf{C}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}[\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}, \quad [L\mathsf{x}]_{\mathcal{B}'} = \mathsf{D}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}[L\mathsf{x}]_{\mathcal{B}},$
- Az $\mathsf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ és $\mathsf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}$ mátrixok hatásai:

$$[L\mathsf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathsf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}, \quad [L\mathsf{x}]_{\mathcal{B}'} = \mathsf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}[\mathsf{x}]_{\mathcal{A}'}.$$

- Lineáris leképezés mátrixai közti kapcsolat

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} &= \mathsf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}\mathsf{C}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}, \text{ azaz} \\
\mathsf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} &= \mathsf{D}^{-1}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}\mathsf{C}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

Lineáris leképezés mátrixa különböző bázispárokban

Á Az $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ mátrixok ugyanannak a lineáris leképezésnek a mátrixa két bázispárokban $\iff$ $\exists \mathbf{C} \in \mathbb{F}^{n\times n}, \mathbf{D} \in \mathbb{F}^{m\times m}$ invertálható mátrixok, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$.

B ($\Rightarrow$) az előzőkben láttuk
($\Leftarrow$) az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ mátrixleképezés lesz a lineáris leképezés és a két bázispár egyike a standard, másika a $\mathbf{C}$ és $\mathbf{D}$ oszlopvektoraiból áll.

Á Lineáris leképezések mátrixai Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ ugyanannak az $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lin. leképezésnek két mátrixa különböző bázispárokban, akkor a két mátrix rangja és nullitása megegyezik.

B ha valamely invertálható $\mathbf{C}$ és $\mathbf{D}$ mátrixszal $\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$ és átrendezve $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$, akkor a szorzatmátrix rangjára vonatkozó állítás szerint $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}) \leqslant r(\mathbf{B})$ és $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}) \leqslant r(\mathbf{A})$.
Így $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$.
Innen $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n - r(\mathbf{A}) = n - r(\mathbf{B}) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B}))$.

P Írjuk fel a $D : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_{n-1}; p(x) \mapsto p'(x)$ lin. leképezés mátrixát a $\{1, x, \ldots, x^n\}$, $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ bázispárban!

M $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mapsto a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} \rightsquigarrow$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{bmatrix}$$

P Írjuk fel a $D : \mathbb{R}[x]_1 \to \mathbb{R}[x]_2; p(x) \mapsto p'(x)$ lin. leképezés mátrixát a következő bázispárokban:

1. $\{1, x\}$, $\{1, x, x^2\}$,
2. $\{x + 1, 2x + 1\}$, $\{1, x, x^2\}$,
3. $\{x + 1, 2x + 1\}$, $\{x^2 - x, x + 2, x^2 + 1\}$.

Mi a közös e mátrixokban?

M 1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Mindegyik rangja 1.

Rang, nullitás, determináns, nyom fogalmának kiterjesztése

D A lineáris $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezés rangján képterének dimenzióját értjük, azaz $\mathrm{r}(L) = \dim(\mathrm{Im}(L))$. A magtér dimenzióját, azaz a $\dim(\mathrm{Ker}(L))$ számot a lineáris leképezés nullitásának nevezzük.

D A lineáris $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ transzformáció $\det L$-lel jelölt determinánsán (illetve $\operatorname{trace} L$-lel jelölt nyomán) az L leképezés bármely bázisban fölírt mátrixának determinánsát (illetve nyomát) értjük. A definíció értelmes, hisz e két érték mindegyike független a bázis választásától.

T Dimenziótétel lineáris leképezésekre – rang-nullitási tétel Legyen $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ egy lineáris leképezés. Ekkor

$$\dim(\mathrm{Im}\, L) + \dim(\mathrm{Ker}\, L) = \dim \mathcal{V} \qquad [\mathrm{r}(L) + \dim(\mathrm{Ker}\, L) = \dim \mathcal{V}]\,.$$

Példák

F Határozzuk meg a rangját, nullitását, determinánsát, nyomát a sík

1. α szögű elforgatásának,
2. egy egyenesre való tükrözésének,
3. egy egyenesre való merőleges vetítésének,

a tér

4. egy egyenes körül való α-szögű elforgatásának,
5. egy egyenesre való merőleges vetítésének,
6. egy síkra való merőleges vetítésének,
7. egy síkra való merőleges tükrözésének!

F Legyen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy lineáris transzformáció. A $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektorok és az $\{A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n\}$ által kifeszített paralelepipedonok térfogata hogyan viszonyul egymáshoz?

P Írjuk fel az origó körüli síkbeli 90°-os forgatás mátrixát a $\mathcal{B} = \{(2,1), (-3,-1)\}$ bázisban.

M $\mathsf{F}_{\mathcal{B}} = \mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1}\mathsf{F}_{\mathcal{E}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$

P Írjuk fel a $(2,2,1)$ vektor körüli 90°-os forgatás mátrixát a standard bázisban, és számítsuk ki a $\mathbf{v} = (3,4,7)$ vektor $\mathbf{w}$ elforgatottját!

M Keressünk egy olyan bázist, melyben könnyű felírni a forgatás mátrixát! Pl. az x-tengely körül forgató mátrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Legyen a $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)$, $\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3}(-2,1,2)$ két merőleges egységvektor, vektori szorzatuk $\mathbf{b}_3 = \frac{1}{3}(1,-2,2)$, így a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban a forgatás mátrixa épp a fent megadott mátrix.

Mivel

$$\mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

ortogonális mátrix, ezért

$$\begin{aligned}\mathsf{F}_{\mathcal{E}} &= \mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{F}_{\mathcal{B}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1} = \mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{F}_{\mathcal{B}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{\mathsf{T}} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 7 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathsf{w} = \mathsf{F}_{\mathcal{E}}\mathsf{v} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 7 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Á L! a lineáris $f : \mathcal{V}_{\mathbb{F}} \to \mathcal{W}_{\mathbb{F}}$ leképezés rangja r. Ekkor $\exists \mathcal{A}$, ill. $\mathcal{B}$ bázis a $\mathcal{V}$, ill. $\mathcal{W}$ terekben, hogy

$$[f]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

B L! $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ bázisa $\operatorname{Ker} f$-nek. Ez kiegészíthető $\mathcal{V}$ bázisává: $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_\ell, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$. Megmutatjuk, hogy $\{f(\mathbf{a}'_1), \ldots, f(\mathbf{a}'_\ell)\}$ bázisa $\operatorname{Im} f$-nek.

Függetlenek: $\mathbf{0} = \sum c_i f(\mathbf{a}'_i) = f(\sum c_i \mathbf{a}'_i) \rightsquigarrow \sum c_i \mathbf{a}'_i \in \operatorname{Ker} f \rightsquigarrow$ $\sum c_i \mathbf{a}'_i = \sum d_j \mathbf{a}_j \rightsquigarrow \forall i, j\ c_i = d_j = 0$.

Generátorrendszer: L! $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tetszőleges $\rightsquigarrow \mathbf{v} = \sum c_i \mathbf{a}'_i + \sum d_j \mathbf{a}_j \rightsquigarrow$ $f(\mathbf{v}) = \sum c_i f(\mathbf{a}'_i) + \sum d_j \mathbf{0} \in \langle f(\mathbf{a}'_1), \ldots, f(\mathbf{a}'_\ell) \rangle$.

Egészítsük ezt ki $\mathcal{W}$ bázisává: $\mathcal{B} = \{f(\mathbf{a}'_1), \ldots, f(\mathbf{a}'_\ell), \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_t\}$. E bázispárban:

$$[f]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

P Melyik bázispárban lesz az $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2; p(x) \mapsto p'(x)$ leképezés mátrixa $\left[\begin{smallmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{smallmatrix}\right]$ alakú? Mennyi a leképezés rangja?

B $\dim \operatorname{Ker} f = 1 \rightsquigarrow \operatorname{r} f = \dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$. Másrészt

$$\begin{aligned} x^2 &\longrightarrow 2x \\ x &\longrightarrow 1 \\ 1 &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

így $\mathcal{A} = \{x, x^2, 1\}$, $\mathcal{B} = \{1, 2x, x^2\}$

HF Legyen az $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ lineáris leképezés rangja r. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges r rangú $\mathsf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ mátrix előáll f mátrixaként alkalmas bázispárban!