12. Házi feladat (határidő: 2017-05-12)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Melyek lineárisan függetlenek az alábbi halmazok közül?

   a) $\{\sin x, \cos x, x\sin x, x\cos x\}$,

   b) $\{\mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^x, x^2\mathrm{e}^x\}$,

   d) $\{\sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x, \cos 2x\}$.

2. Ábrázoljuk $\mathbb{R}^2$-ben a $(0,1)$ fókuszú és $y=-1$ vezéregyenesű parabolát az összeg-, illetve a maximummetrikára nézve (azaz adjuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyek az adott metrika szerint egyenlő távolságra vannak a fókuszponttól és a vezéregyenestől)!

3. Adjunk meg $\mathbb{R}^n$-ben

   (a) $2n$ pontot, amelyek az összegmetrikára és

   (b) 2^n pontot, amelyek a maximummetrikára

   nézve páronként egyenlő távolságra vannak egymástól.

4. Tekintsük az alábbi mátrixokat:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & -2 & 4\\ -2 & 1 & -2\\ 4 & -2 & 4\end{bmatrix}.$$

   a) Határozzuk meg Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normájukat!

   b) Rajzoljuk le mindkét mátrix spektrálkörét, sajátértékeit és normáit!

5. Legyen $\mathbf{M}$ egy $m\times n$-es teljes oszloprangú komplex mátrix. Mutassuk meg, hogy ha $\|.\|$ egy tetszőleges norma $\mathbb{C}^n$-ben, akkor az

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{M}}=\|\mathbf{M}\mathbf{x}\|$$

   képlettel definiált $\mathbf{x}\mapsto\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{M}}$ függvény norma.

6. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ normális mátrix, akkor a 2-normája egyenlő a spektrálsugarával!

7. Mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix spektrálsugara kisebb egyenlő mint bármely mátrixnorma szerinti normája, képlettel:

$$\rho(\mathbf{A})\leqslant\|\mathbf{A}\|,$$

   speciálisan legfeljebb akkora, mint a 2-normája!

8. Mutassuk meg, hogy ha $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ az $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix sajátértékei, akkor $\sum_{i=1}^n|\lambda_i|^2$ felülről becsülhető $\mathbf{A}$ Frobenius-normájának négyzetével és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A}$ normális mátrix.

9. Bizonyítsuk be, hogy egy d-reguláris egyszerű irányítatlan gráf szomszédsági mátrixának spektrálsugara és 1-, 2 és ∞-normája is d.

10. Határozzuk meg az n ágú irányítatlan csillaggráf szomszédsági mátrixának spektrálsugarát és 1-, 2-, illetve ∞-normáját!

*11. Bizonyítsuk be, hogy a maximum metrikára nézve $\mathbb{R}^n$-ben legfeljebb 2^n olyan pont van, amelyeknek a páronkénti távolsága egyenlő!

*12. Tegyük fel, hogy $\|.\|$ egy mátrixnorma $\mathbb{C}^n$-ben és $\mathbf{M}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ invertálható. Igazoljuk, hogy ekkor az

$$\mathbf{A}\mapsto\|\mathbf{A}\|_{\mathbf{M}}=\|\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\|\qquad(\mathbf{A}\in\mathbb{C}^n)$$

   képlettel definiált függvény mátrixnorma. Ha a $\|.\|$ mátrixnorma az azonos módon jelölt $\|.\|$ vektornorma indukált normája, akkor a $\|.\|_{\mathbf{M}}$ mátrixnorma is indukált normája a 7. feladatban definiált $\|.\|_{\mathbf{M}}$ vektornormának.