11. Házi feladat (határidő: 2017-05-05)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

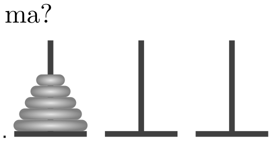
1. Keressük meg azt a p Hermite-féle interpolációs polinomot, melyre $e^{\mathbf{A}} = p(\mathbf{A})$ a következő mátrixra:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

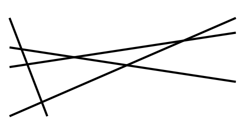
2. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra $e^{\mathbf{A}}$ diagonalizálható, akkor $\mathbf{A}$ is az!

3. Igazoljuk, hogy az f_n függvény eleget tesz az $f_{n+1}(x) = \frac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{-x} - x f_n(x)\right)$ egyenletnek, ahol
$$f_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n}\,\mathrm{d}t.$$

4. Ellenőrizzük, hogy az alábbi egyszerű differenciaegyenleteknek a megadott sorozatok a megoldásai:
$$x_n - 2x_{n-1} = 1 \qquad x_n = c2^n - 1$$
$$x_n - x_{n-1} = n \qquad x_n = \frac{1}{2}(n^2+n) + c$$

5. Írjunk fel egy megfelelő differenciaegyenletet az alábbi feladatok megoldására, majd oldjuk meg: *(a)* A Hanoi tornyai feladványban 3 pálca egyikén n különböző méretű korong van, melyeket egy másikra kell helyezni úgy, hogy minden lépésben egyetlen korongot lehet áthelyezni egyik pálcáról egy másikra, és a játék során hogy bármely korong csak nagyobb méretűre kerülhet. Mennyi a szükséges lépések számának minimuma?





(b) Hány tartományra osztja a síkot n egyenes, melyek közt nincs két párhuzamos és semelyik ponton sem megy át kettőnél több közülük.

6. Számítsuk ki az alábbi n-edrendű determináns értékét:
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 & 1 \\ 0 & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

7. Tekintsük az alábbi mátrixokat!
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$
Jellemezzük az $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásának stabilitását a sajátértékek ismeretében!

8. Oldjuk meg az
$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$
differenciálegyenlet-rendszert az $\mathbf{x}(0) = (1, 1)$ kezdeti feltétel mellett!

9. Alakítsuk át az $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ differenciálegyenletet differenciálegyenlet-rendszerré, és oldjuk meg!

10. Keressünk olyan nem diagonalizálható 3×3-as $\mathbf{A}$ mátrixot, amelyre $\mathbf{A}^3$ kifejezhető az $\mathbf{A}$ mátrix elsőfokú polinomjaként!

*11. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sajátértékei valósak. Bizonyítsuk be, hogy ha $e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{B}}$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

*12. Számítsuk ki az alábbi n-edrendű determináns értékét, ahol a, b, c valós számok:
$$D_n = \begin{vmatrix} b & c & & & 0 \\ a & b & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a & b & c \\ 0 & & & a & b \end{vmatrix}$$