9. Házi feladat (határidő: 2017-04-21)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Mi lehet a Jordan-normálalakja annak a komplex mátrixnak, amelynek

   (a) karakterisztikus polinomja $x^2(x-1)^2$, minimálpolinomja $x(x-1)^2$;

   (b) karakterisztikus polinomja $(x-1)^6$, minimálpolinomja $(x-1)^4$, az 1-hez tartozó $\mathcal{V}_1$ sajátaltér dimenziója 2;

   (c) karakterisztikus polinomja $-x^3(x+1)^4$, $\dim \mathcal{V}_0 = 1$, és $\dim \mathcal{V}_{-1} = 3$;

   (d) karakterisztikus polinomja $-(x-\lambda)^7$, minimálpolinomja $(x-\lambda)^3$, $\dim \mathcal{V}_\lambda = 3$?

2. Legfeljebb hány olyan komplex mátrix létezik, melyek közül semelyik kettő nem hasonló, de mindegyik

   (a) karakterisztikus polinomja $(x-1)^3(x-3)^4$;

   (b) minimálpolinomja $(x+2)^6$, és sajátaltere 2-dimenziós?

3. Mutassuk meg, hogy ha két 3×3-as komplex mátrix karakterisztikus és minimálpolinomja megegyezik, akkor a két mátrix hasonló.

4. Mutassuk meg, hogy ha két 4×4-es komplex mátrix karakterisztikus és minimálpolinomja, valamint sajátaltereik dimenziója megegyezik, akkor a két mátrix hasonló.

5. Mutassuk meg, hogy minden mátrix hasonló a transzponáltjához!

6. Mi lesz az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja?

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *(b)* $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ *(d)* $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *(e)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. Legyen $\mathbf{A}$ nilpotens $n \times n$-es mátrix, amelynek Jordan-normálalakjában a blokkok mérete $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t$. Mi $\mathbf{A}$-nak és $\mathbf{A}^2$-nek a minimálpolinomja és a rangja? Mekkorák az $\mathbf{A}^2$ Jordan-normálalakjában a Jordan-blokkok?

8. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{N}$ egy $n \times n$-es, 0 sajátértékhez tartozó Jordan-blokk, akkor $\mathbb{C}^n$-ben csak azok a mátrixok cserélhetők fel $\mathbf{N}$-nel, amelyek $\mathbf{N}$-nek polinomjai! Hány dimenziós ennek alapján a

   $$\mathcal{V} = \{\, \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \mathbf{AN} = \mathbf{NA} \,\} \leq \mathbb{C}^{n \times n}$$

   altér?

9. Adjunk meg két felcserélhető mátrixot, amelyek közül egyik sem polinomja a másiknak!

10. Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathbf{A}$ komplex mátrix $k > 0$-adik hatványa az egységmátrix, akkor $\mathbf{A}$ diagonalizálható!

*11. Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es komplex $\mathbf{A}$ mátrix minimálpolinomja n-edfokú. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a

   $$\mathcal{V} = \{\, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \,\} \leq \mathbb{C}^{n \times n}$$

   altér dimenziója $n - k$, ahol k az $\mathbf{A}$ különböző sajátértékeinek száma!

*12. Legyen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, és tegyük fel, hogy a $\mathbf{C} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ mátrix rangja 1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\mathbf{C}^2 = \mathbf{O}$.