7. Házi feladat (határidő: 2017-04-07)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Bizonyítsuk be, hogy minden indefinit ermitikus bilineáris függvényre nézve van olyan nem nulla vektor, amely merőleges önmagára!

2. Bázisával adjuk meg az $\mathbb{R}^3$ tér $(-1, 1, 0)$ és $(-1, 0, 1)$ vektorai által generált altér merőlegesét a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{y}$ szimmetrikus bilineáris függvényre nézve, ha
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg $\mathbb{R}^3$-ben az $(1, -1, 1)$ vektor által generált altér bal, illetve jobb oldali merőlegesét a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{y}$ bilineáris függvényre nézve, ha
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

4. Mutassuk meg, hogy a főminorok (sarokaldeterminánsok) pozitivitása helyett a jobb alsó sarokból induló sarokaldeterminánsok pozitivitása is a szimmetrikus mátrix (és a hozzá tartozó kvadratikus alak) pozitív definitségét vonja maga után!

5. Mutassuk meg, hogy minden valós kvadratikus alak az egységvektorok körében felveszi a maximumát, a maximumhely sajátvektor és a maximum értéke sajátérték!

A következő feladatokban legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ és $\mathbf{D}$ mátrixok redukált valamint teljes SVD-felbontását!

7. Határozzuk meg a bal- és jobboldali szinguláris vektorokat a hozzájuk tartozó szinguláris értékkel együtt és a szinguláris felbontások diadikus alakját!

8. Számítsuk ki a mátrixok általánosított inverzét az SVD-felbontás segítségével.

9. Számítsuk ki az $\mathbf{A}$ mátrix polárfelbontását!

10. Mutassuk meg, hogy minden $\mathbf{M}$ mátrixra
$$\min_{|\mathbf{x}|=1} |\mathbf{M}\mathbf{x}|$$
a legkisebb szinguláris érték, és a minimumát az ehhez tartozó jobb szinguláris vektoron veszi fel!

*11. Legyen φ szimmetrikus bilineáris függvény az n dimenziós V valós vektortéren, és tegyük fel, hogy φ diagonális mátrixában m darab diagonális 0 van. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges $W \le V$ altér φ-re vonatkozó $W_\varphi^\perp$ merőlegesére teljesül, hogy $n \le \dim W + \dim W_\varphi^\perp \le n + m$. Lássuk be, hogy n és $n + m$ között minden lehetséges érték előáll alkalmas W altérre!

*12. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix legkisebb pozitív szinguláris értéke σ_r, és $0 < |\varepsilon| < \sigma_r^2$, akkor az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I}$ mátrix invertálható és
$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^+.$$