5. Házi feladat (határidő: 2017-03-17)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, és jelölje $\mathbf{A}$ sajátértékeit λ_1, λ_2,..., λ_n. Igazoljuk, hogy $\mathbf{A}$ pontosan akkor normális, ha

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2.$$

2. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Határozzuk meg az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix rangját, és adjuk meg a nullterének egy bázisát! *(b)* Egészítsük ki ezt az $\mathbb{R}^n$ egy $\mathcal{B}$ bázisává. *(c)* A $\mathcal{B}$ bázisra való áttéréssel hozzuk az $\mathbf{A}$ mátrixot

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

blokkmátrix alakra (ahol $\mathbf{C}$ invertálható), és ebből számítsuk ki $\mathbf{A}$ összes sajátértékét!

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix Schur-felbontását!

$$\begin{bmatrix} -58 & 25 \\ -144 & 62 \end{bmatrix}$$

4. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{A}$ minden sor- vagy oszlopösszege c, akkor c az $\mathbf{A}$ egy sajátértéke.

5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}$ vektorokra fennáll a következő polarizációs formula:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \frac{1}{4}\left(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 + \mathrm{i}\,|\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}|^2 - \mathrm{i}\,|\mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v}|^2\right)$$

6. Igazoljuk, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix unitéren diagonalizálható! Adjuk meg azt az ortonormált bázist, melyben e mátrix alakja diagonális, és adjuk meg a diagonális mátrixot is!

7. Keressünk olyan ortonormált bázist $\mathbb{R}^3$-ben, amelyre nézve az origón átmenő $(1, 1, 4)$ irányvektorú egyenesre való f tükrözés mátrixa diagonális. Írjuk fel a transzformáció standard mátrixát is!

8. Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

mátrix spektrálfelbontását, és számítsuk ki az $\mathbf{A}^{12}$ mátrixot!

9. Ellenőrizzük, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix normális, adjuk meg a diagonális alakját $\mathbb{C}$ fölött, és a valós blokkdiagonális alakját (amely csak 1×1-es és 2×2-es

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

alakú diagonális blokkokat tartalmaz)!

10. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1-i \\ 1 & 1 & -1-i \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

mátrixnak van tiszta képzetes sajátértéke. Adjunk becslést ennek a sajátértéknek a nagyságára a Gersgorin-körök alapján!

*11. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A}$ önadjungált mátrix, akkor az $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$,... mátrixok vagy mind különbözők, vagy legfeljebb két különböző van közöttük!

*12. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, akkor a $\mathbf{c}\mathbf{d}^\mathsf{T}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(-1)^n\lambda^{n-1}(\lambda - \mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{c})$. Ezt felhasználva mutassuk meg, hogy ha a $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorok egyike sem a nullvektor, akkor $\mathbf{c}\mathbf{d}^\mathsf{T}$ pontosan akkor diagonalizálható, ha $\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{c} \neq 0$.