4. Házi feladat (határidő: 2017-03-10)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Határozzuk meg a következő lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait!
   a) Az $(1, 2, -3)$ irányvektorú, origón átmenő egyenesre való tükrözés az $\mathbb{R}^3$-ben.
   b) A transzponálás a 2×2-es valós mátrixok terében.

2. Az alábbi mátrixok közül melyek diagonalizálhatók $\mathbb{R}$ fölött? Mindegyik mátrixra adjuk meg a sajátértékeket és azok algebrai és geometriai multiplicitását!
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Adjuk meg az előző feladat $\mathbf{C}$ mátrixához a sajátalterek egy-egy bázisát! Adjunk meg $\mathbb{R}^3$-ben egy a $\mathbf{C}$ mátrix sajátvektoraiból álló ortonormált bázist és ennek felhasználásával adjuk meg $\mathbf{C}$ sajátfelbontását!

4. Melyek igazak egy $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixra?
   (a) Ha $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}$-nak, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}^2$-nek is.
   (b) Ha $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}^2$-nek, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}$-nak is.
   (c) Ha 0 sajátértéke $\mathbf{A}^2$-nek, akkor 0 sajátértéke $\mathbf{A}$-nak is.
   (d) Ha $a^2 = b$ és b sajátértéke $\mathbf{A}^2$-nek, akkor a vagy $-a$ sajátétéke $\mathbf{A}$-nak is.

5. Adjuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ komplex mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát!

6. Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix 100-adik hatványát diagonális alakra hozással!

7. Legyen $\mathbf{A}$ az az $n \times n$-es mátrix, amelynek a nem nulla elemei $a_{i,i+1} = 1$ $(i = 1, \dots, n-1)$, és $a_{n,1} = 1$. Bizonyítsuk be, hogy ez a mátrix diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött! Mi a diagonális alakja?

8. Írjuk fel az alábbi mátrixok karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, és azok algebrai és geometriai multiplicitását!
   (a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
   (b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

9. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(x-1)x^3$, és a 0 sajátérték geometriai multiplicitása 1. Mit mondhatunk A rangjáról? Adjunk meg egy ilyen $\mathbf{A}$ mátrixot!

10. Az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix két elemét nem ismerjük, de tudjuk, hogy az egyik sajátértéke 3. Mi a másik két sajátértéke?
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}$$

*11. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, és legyen $L : \mathbb{C}^{m \times n} \to \mathbb{C}^{m \times n}; \mathbf{X} \mapsto \mathbf{AXB}$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{x}$ az $\mathbf{A}$ sajátvektora, és $\mathbf{y}^{\mathsf{H}}$ a $\mathbf{B}$ bal sajátvektora, akkor $\mathbf{xy}^{\mathsf{H}}$ az L transzformáció sajátvektora. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{trace}(L) = \operatorname{trace}(\mathbf{A}) \operatorname{trace}(\mathbf{B})$.

*12. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ $n \times n$-es mátrixokra $\mathbf{AB}$-nek és $\mathbf{BA}$-nak ugyanazok a sajátértékei!