3. Házi feladat (határidő: 2017-03-03)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{A}$ akkor és csak akkor szimmetrikus, ha minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $(\mathbf{A}\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{y})$!

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix QR-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, akkor a $\mathbf{B} = \mathbf{RQ}$ mátrix is szimmetrikus!

3. Mekkora az alábbi vektorok hossza?

   (a) $(1 - \mathrm{i}, \mathrm{i}, -2, 1 + \mathrm{i})$

   (b) $(a + b\mathrm{i}, b + c\mathrm{i}, c + a\mathrm{i})$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

4. Számítsuk ki az alábbi két vektor skaláris szorzatát és távolságát!

   (a) $(1 + \mathrm{i}, \mathrm{i}, -1)$, $(1 + \mathrm{i}, -\mathrm{i}, -1)$

   (b) $(1 - \mathrm{i}, \mathrm{i}, -2, 1 + \mathrm{i})$, $(1 + \mathrm{i}, 0, 2, 1 - \mathrm{i})$

5. Végezzük el a Gram–Schmidt-eljárást a $\mathbb{C}^3$-beli $(\mathrm{i}, 1, \mathrm{i})$, $(\mathrm{i}, 1, 0)$, $(\mathrm{i}, 0, 0)$ vektorokon!

6. Milyen feltételek mellett unitér a következő mátrix, ha $a, b \in \mathbb{R}$?

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b\mathrm{i} & 0 \\ 0 & a & 0 & b\mathrm{i} \\ b\mathrm{i} & 0 & a & 0 \\ 0 & b\mathrm{i} & 0 & a \end{bmatrix}$$

7. Döntsük el a következő mátrixok mindegyikéről, hogy önadjungált, ferdén önadjungált, unitér, illetve normális-e!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

8. Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix önadjungált és unitér (így persze normális is). Keressünk egy olyan $\mathbf{B}$ mátrixot, amely hasonló $\mathbf{A}$-hoz, és még csak nem is normális!

9. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix normális, az $\mathbf{A}$ mátrixot pedig úgy kaptuk $\mathbf{N}$-ből, hogy az i. sorát, majd az i. oszlopát megszoroztuk -1-gyel (tehát az ii indexű eleme nem változott). Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{A}$ is normális!

10. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ olyan mátrix, amelyre $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = -\mathbf{I}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\mathbf{A}$ normális. Lássuk be, hogy ha $\mathbf{A}$ emellett felső háromszögmátrix is, akkor csak diagonális lehet. Hány olyan mátrix van, amelyik kielégíti mind a két feltételt?

*11. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixra $\operatorname{tr}^2(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}) \leqslant \operatorname{tr}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}) \operatorname{tr}(\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{B})$.

*12. Definiáljuk $\mathbb{F}_2^n$-en egy vektor hosszát a benne szereplő 1-ek számaként. Bizonyítsuk be, hogy ez a hosszúság is kielégíti a háromszög-egyenlőtlenséget, azaz $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$. Hány olyan vektorpár van, amelyekre a háromszög-egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül?