12. Házi feladat (határidő: 2018-05-14)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

Az 1–4. feladatban legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakját és egy Jordan-bázisát!
2. Állítsuk elő az $\mathbf{A}$ mátrix századik hatványát!
3. Határozzuk meg $e^{\mathbf{J}}$ és $\sqrt{\mathbf{J}}$ értékét, ahol $\mathbf{J}$ az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakja!
4. Határozzuk meg $e^{3\mathbf{A}}$ értékét!
5. Keressük meg azt a p Hermite-féle interpolációs polinomot, melyre $e^{\mathbf{B}} = p(\mathbf{B})$ a következő mátrixra, és számítsuk ki ebből az $e^{\mathbf{B}}$ értékét!

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Ábrázoljuk $\mathbb{R}^2$-ben a $(0,1)$ fókuszú és $y = -1$ vezéregyenesű parabolát a maximummetrikára nézve (azaz adjuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyek az adott metrika szerint egyenlő távolságra vannak a fókuszponttól és a vezéregyenestől)!
7. Ábrázoljuk $\mathbb{R}^2$-ben a $(0,1)$ fókuszú és $y = -1$ vezéregyenesű parabolát az összegmetrikára nézve!
8. Adjunk meg $\mathbb{R}^n$-ben
   (a) $2n$ pontot, amelyek az összegmetrikára
   (b) 2^n pontot, amelyek a maximummetrikára

   nézve páronként egyenlő távolságra vannak egymástól.
9. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

   a) Határozzuk meg $\mathbf{A}$ Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normáját!

   b) Rajzoljuk le $\mathbf{A}$ spektrálkörét, sajátértékeit és normáit!
10. Legyen $\mathbf{M}$ egy $m \times n$-es teljes oszloprangú komplex mátrix. Mutassuk meg, hogy ha $\|.\|$ egy tetszőleges norma $\mathbb{C}^n$-ben, akkor az

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{M}} = \|\mathbf{M}\mathbf{x}\|$$

   képlettel definiált $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{M}}$ függvény norma.

*11. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sajátértékei valósak. Bizonyítsuk be, hogy ha $e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{B}}$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

*12. Bizonyítsuk be, hogy a maximum metrikára nézve $\mathbb{R}^n$-ben legfeljebb 2^n olyan pont van, amelyeknek a páronkénti távolsága egyenlő!