11. Házi feladat (határidő: 2018-05-07)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathbf{A}$ komplex mátrix $k > 0$-adik hatványa az egységmátrix, akkor $\mathbf{A}$ diagonalizálható!

2. Bizonyítsuk be, hogy egy r rangú mátrix minimálpolinomjának a foka legfeljebb $r + 1$.

3. Hány olyan páronként nem hasonló, nem diagonalizálható 3×3-as komplex mátrix van, amelynek a determinánsa 0, és a nyoma 1?

4. Milyen feltétel mellett igaz, hogy az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}'$ mátrixok hasonlók?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér összes $\mathbf{A}$-invariáns alterét, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{N}$ egy $n \times n$-es, 0 sajátértékhez tartozó Jordan-blokk, akkor $\mathbb{C}^n$-ben csak azok a mátrixok cserélhetők fel $\mathbf{N}$-nel, amelyek $\mathbf{N}$-nek polinomjai!

7. Adjunk meg két felcserélhető mátrixot, amelyek közül egyik sem polinomja a másiknak! (A 3×3-as diagonális mátrixok között is van ilyen.)

8. Legyen $\mathbf{A}$ egy 10×10-es valós mátrix! Jelölje r_i az $\mathbf{A}^i$ rangját! Lehet-e az $(r_1, r_2, \dots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal?

   (a) $(5, 6, \dots)$;

   (b) $(9, 8, 7, \dots, 4, 4 \dots)$;

   (c) $(10, 9, 8, \dots)$

   (d) $(8, 5, \dots)$

9. Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Az $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 8, 6, 5, 4, 4. Az $\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 6. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-alakját!

10. Határozzuk meg az alábbi mátrix Jordan-féle normálalakját és egy Jordan-bázisát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

*11. Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es, λ sajátértékű Jordan-blokk. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$ blokkmátrix minimálpolinomja $(x - \lambda)^{n+1}$. Mi a $\mathbf{B}$ mátrix Jordan-féle normálalakja?

*12. Van-e olyan 3×3-as valós, 0 nyomú $\mathbf{A}$ mátrix, amelyre és $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{I}$?