9. Házi feladat (határidő: 2018-04-21)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Adjunk meg olyan valós szimmetrikus nem diagonális mátrixot, amelynek

   (a) minden főminora nemnegatív, és a mátrix negatív szemidefinit;

   (b) minden főminora nulla, és a mátrix indefinit.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy valós szimmetrikus mátrixnak van páros rendű negatív főminora, akkor a mátrix indefinit.

3. Mutassuk meg, hogy minden valós kvadratikus alak az egységvektorok körében felveszi a maximumát, a maximumhely sajátvektor és a maximum értéke sajátérték! (Útmutatás: írjuk fel a vektorokat egy ortonormált sajátbázis lineáris kombinációiként!)

A 4–9. feladatban legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ és $\mathbf{D}$ mátrixok redukált SVD-felbontását!

5. Adjuk meg a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok teljes SVD-felbontását!

6. Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ mátrixok SVD-felbontását írjuk fel diadikus alakban is! Mik ezeknek a mátrixoknak az adott szinguláris értékekhez tartozó bal és jobb oldali szinguláris vektorai?

7. Számítsuk ki a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{D}$ mátrixok pszeudoinverzét az SVD-felbontás segítségével.

8. Számítsuk ki a $\mathbf{B}$ mátrix polárfelbontását!

9. Adjuk meg a $\mathbf{D}$ mátrix legjobb 1 rangú közelítését! Mekkora a közelítő mátrix eltérése $\mathbf{D}$-től Frobenius-normában?

10. Mutassuk meg, hogy, ha egy $\mathbf{A}$ komplex négyzetes mátrix polárfelbontásában

$$\mathbf{A} = \mathbf{PQ} = \mathbf{QP},$$

azaz az unitér és pozitív szemidefinit rész felcserélhető, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix normális mátrix.

*11. Mutassuk meg, hogy minden $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrixra

$$\min_{|\mathbf{x}|=1} |\mathbf{Mx}|$$

vagy 0, vagy (teljes oszloprangú mátrixra) a legkisebb szinguláris érték, és a minimumát az ehhez tartozó jobb szinguláris vektorokon veszi fel!

*12. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix legkisebb pozitív szinguláris értéke σ_r, és $0 < |\varepsilon| < \sigma_r^2$, akkor az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I}$ mátrix invertálható és

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^+.$$