4. Házi feladat (határidő: 2018-03-09)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{A}$ akkor és csak akkor szimmetrikus, ha minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra
$$(\mathbf{A}\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{y})!$$

2. Mekkora az alábbi vektorok hossza?
   (a) $(1-\mathrm{i}, \mathrm{i}, -2, 1+\mathrm{i})$
   (b) $(a+b\mathrm{i}, b+c\mathrm{i}, c+a\mathrm{i})$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

3. Számítsuk ki az alábbi két vektor skaláris szorzatát és távolságát!
   (a) $(1+\mathrm{i}, \mathrm{i}, -1)$, $(1+\mathrm{i}, -\mathrm{i}, -1)$
   (b) $(1-\mathrm{i}, \mathrm{i}, -2, 1+\mathrm{i})$, $(1+\mathrm{i}, 0, 2, 1-\mathrm{i})$

4. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektor pontosan akkor merőleges a konjugáltjára, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ a valós euklideszi térben azonos hosszúságú, egymásra merőleges vektorok!

5. Ortogonalizáljuk Gram–Schmidt-eljárással a $\mathbb{C}^3$-beli $(\mathrm{i}, 1, \mathrm{i})$, $(\mathrm{i}, 1, 0)$, $(\mathrm{i}, 0, 0)$ vektorokat!

6. Milyen feltételek mellett unitér a következő mátrix, ha $a, b \in \mathbb{R}$?
$$\begin{bmatrix} a & 0 & b\mathrm{i} & 0 \\ 0 & a & 0 & b\mathrm{i} \\ b\mathrm{i} & 0 & a & 0 \\ 0 & b\mathrm{i} & 0 & a \end{bmatrix}$$

7. Döntsük el a következő mátrixok mindegyikéről, hogy önadjungált, ferdén önadjungált, unitér, illetve normális-e!
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

8. Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix önadjungált és unitér (így persze normális is). Keressünk egy olyan $\mathbf{B}$ mátrixot, amely hasonló $\mathbf{A}$-hoz, és még csak nem is normális!

9. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix normális, az $\mathbf{A}$ mátrixot pedig úgy kaptuk $\mathbf{N}$-ből, hogy az i. sorát, majd az i. oszlopát megszoroztuk -1-gyel (tehát az ii indexű eleme nem változott). Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{A}$ is normális! (Útmutatás: hogyan kaphatjuk meg $\mathbf{N}$-et $\mathbf{A}$-ból mátrixszorzással?)

10. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbf{A}$ unitér mátrixra
$$|a_{ij}| = |A_{ij}|$$
minden i, j-re, ahol A_{ij} az $\mathbf{A}$ mátrix (i, j) helyhez tartozó előjeles aldeterminánsa.

*11. Definiáljuk $\mathbb{F}_2^n$-en egy vektor hosszát a benne szereplő 1-ek számaként. Bizonyítsuk be, hogy ez a hosszúság is kielégíti a háromszög-egyenlőtlenséget, azaz $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \le |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$. Hány olyan vektorpár van, amelyekre a háromszög-egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül?

*12. Legyen V valós euklideszi tér, és tegyük fel, hogy az $f : V \to V$ leképezés távolságtartó (azaz $|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})| = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$ minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vektorra), és $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, de az f-ről nincs feltéve, hogy lineáris. Bizonyítsuk be, hogy $f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v})$ minden $\mathbf{v} \in V$ vektorra!