## 3. Házi feladat (határidő: 2018-03-02)

*A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!*

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transzformáció valamely $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ bázis elemeit olyan $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ bázisba viszi, amelynek vektorai ugyanolyan hosszúságúak és szögűek, mint az eredeti báziséi, akkor $f$ ortogonális transzformáció.

2. Ortogonális-e az a transzformáció $\mathbb{R}^2$-en, amelynek mátrixa a
$$\mathcal{B} = \{(1, -1), (1, 0)\}$$
bázisban
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

3. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$
Határozzuk meg $\mathbf{A}$ QR-felbontását Gram–Schmidt-féle ortogonalizációval!

4. *(a)* Írjuk fel azt a $2 \times 2$-es forgatásmátrixot, amely az $(1, 2)$ vektort elforgatja a $(\sqrt{5}, 0)$ vektorba!

   *(b)* Írjuk fel a $\mathbf{v} = (1, -1, 1, -1)$ normálvektorú hipersíkra való Householder-tükrözés mátrixát!

5. Írjuk fel azt a Householder-tükrözést, amely a $\mathbf{v} = (1, -1, 1, -1)$ vektort olyan vektorba viszi, amelynek csak az első koordinátája nem nulla, és az első koordináta negatív! Milyen normálvektorú hipersíkra tükröz ez a transzformáció?

6. Határozzuk meg az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 7 \\ 3 & 10 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}$$
mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

7. Határozzuk meg az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$
mátrix QR-felbontását Householder-tükrözések segítségével!

8. Határozzuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer összes optimális megoldását QR-felbontás segítségével, ha $\mathbf{A}$ a 3. feladat mátrixa, és $\mathbf{b} = (0, 0, 0, 1)$! Hány optimális megoldása van?

9. Az 3. feladatbeli QR-felbontás $\mathbf{Q}$ mátrixát egészítsük ki ortogonális mátrixszá és ennek segítségével adjuk meg $\mathbf{A}$ teljes QR-felbontását!

10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix QR-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, akkor a $\mathbf{B} = \mathbf{RQ}$ mátrix is szimmetrikus!

*11 Határozzuk meg az összes olyan $2 \times 2$-es valós mátrixot, amelynek a sorai és az oszlopai is ortogonális rendszert alkotnak, de a mátrix mégsem ortogonális, sőt nem is egy ortogonális mátrix skalárszorosa.

*12 Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixra
$$\operatorname{tr}^2(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{B}) \leqslant \operatorname{tr}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}) \operatorname{tr}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B}).$$