2. Házi feladat (határidő: 2017-02-23)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Írjuk fel az origón átmenő, $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ irányvektorú E egyenes mentén az $x + y + z = 0$ egyenletű S síkra vetítő leképezés, illetve az S sík mentén az E egyenesre való vetítés standard mátrixát! Mi a két leképezés kompozíciójának standard mátrixa?

2. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok között melyek hasonlóak $\mathbb{R}$ fölött? A hasonlókra adjunk is meg egy átkonjugáló mátrixot!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Milyen geometriai transzformációkat írnak le az alábbi ortogonális mátrixok $\mathbb{R}^2$-ben? Melyek hasonlóak közülük?

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Tekintsük a $V = \operatorname{span}((1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0))$ alteret a $\mathbb{Z}_2^4$ vektortérben.

   (a) Bizonyítsuk be, hogy $V^\perp$ nem direkt kiegészítője V-nek!

   (b) Válasszunk ki a $\mathbb{Z}_2^4$ standard $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ bázisából két elemet, amelyek a V-nek valamelyik direkt kiegészítőjét feszítik ki!

5. Bizonyítsuk be, hogy minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorra teljesül:
$$\big|\, |\mathbf{u}| - |\mathbf{v}| \,\big| \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}|.$$
   Mikor van egyenlőség?

6. Bizonyítsuk be, hogy minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorra teljesül:
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right).$$

7. Adjuk meg az alábbi vektorok által kifeszített térnek egy *ortonormált* bázisát a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációval!
$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1),\ \mathbf{v}_2 = (1, 2, 1, 2), \mathbf{v}_3 = (1, 2, 3, 6).$$

8. Legyen $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, -1, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, -1, -1, 1)$.

   (a) Igazoljuk, hogy $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ ortogonális bázis $\mathbb{R}^4$-ben!

   (b) Írjuk fel azt a képletet, mely megadja egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor fenti bázisra vonatkozó i-edik koordinátáját ($i = 1, 2, 3, 4$)!

   (c) Számítsuk ki az $\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)$ vektornak a $\mathcal{V} = \operatorname{span}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ altérre való merőleges vetületét!

9. Tudjuk, hogy az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$
   mátrixra $\langle x, y \rangle := \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{y}$ skalárszorzat $\mathbb{R}^2$-en.

   (a) Mi az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektorok hossza és skalárszorzata erre a skalárszorzatra nézve?

   (b) Adjunk meg egy ortonormált bázist!

10. Melyik szemiortogonális az alábbi mátrixok közül? A szemiortogonálisoknak melyik oldali inverze létezik? Adjuk is meg a megfelelő egyoldali inverzeket!
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*11 Legyen $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ tetszőleges bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan $\{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ bázis létezik, hogy $\mathbf{b}_i\mathbf{c}_j = \delta_{ij}$ minden $1 \leqslant i, j \leqslant n$ indexpárra, ahol δ_{ij} a Kronecker-δ.

*12 Legyen $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ merőleges alterekre bontás, és az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopai U-nak, a $\mathbf{B}$ mátrixé V-nek alkossák egy-egy bázisát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az
$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]$$
blokkmátrix inverze az
$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{A}^+ \\ \hline \mathbf{B}^+ \end{array}\right]$$
blokkmátrix, ahol $^+$ a pszeudoinverzet jelöli.