2. ZH **Bevezetés az algebrába 1** **2016-11-24**

A dolgozat alatt semmilyen segédeszköz nem használható. A feladatok tetszőleges sorrendben megoldhatók. Kidolgozási idő 60 perc.

1. Az a paraméter értékétől függően hány megoldása van a következő egyenletrendszernek ha azt *(a)* a valós test, *(b)* a $\mathbb{Z}_5$ test fölött tekintjük: *(3 pont)*

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 1 \\ 6x - 3y + 2z &= 1 \\ 2x + 4y + az &= a \end{aligned}$$

2. Tekintsük az $(2, 2, 4, 2)$, $(1, 1, 2, 1)$, $(1, -2, 1, 0)$, $(3, 0, 5, 2)$ vektorokat! Válasszunk ki közülük olyan vektorokat, melyek a 4 vektor által kifeszített altér bázisát alkotják! Írjuk fel mind a négy vektornak e bázisra vonatkozó koordinátás alakját! *(3 pont)*

3. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben alteret alkotnak azok a mátrixok, amelyek felcserélhetők a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixszal! Adjuk meg ennek az altérnek egy bázisát! *(3 pont)*

4. Számítsuk ki a következő mátrix PLU-felbontását! *(4 pont)*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Legyen az áttérésmátrix két bázis között

$$\mathbf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel a $\mathbf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ áttérésmátrixot, és adjuk meg a $(\mathbf{v})_{\mathcal{C}}$ vektor koordinátáit, ha $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = (a, b, c)$. *(3 pont)*

6. Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix bázisfelbontását, és ennek segítségével bontsuk fel az $\mathbf{A}$ mátrixot minimális számú diád összegére! *(4 pont)*