

A dolgozat alatt semmilyen segédeszköz nem használható. A feladatok tetszőleges sorrendben megoldhatók. Kidolgozási idő 60 perc.

1. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$, ahol F_n az n -edik Fibonacci-szám
($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$)! (3 pont)
2. A kibővített euklideszi algoritmus segítségével keressünk olyan x és y egész számokat, amelyekre $47x + 19y = 4$. (3 pont)
3. Adjuk meg az alábbi kongruenciarendszer összes megoldását! (3 pont)

$$x \equiv 2 \pmod{4}$$

$$x \equiv 1 \pmod{5}$$

$$x \equiv -2 \pmod{7}$$

4. Bontsuk fel az $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 2$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Q}[x]$ -ben és $\mathbb{Z}_3[x]$ -ben! (4 pont)
5. Határozzuk meg $-i$ köbgyökeit, és döntsük el mindegyikről, hogy hányadrendű, azaz hányadik primitív egységgyök! (4 pont)
6. A p prím hányadik hatványával osztható a $\binom{p^n}{p}$ binomiális együttható? (3 pont)