

E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV _____

NEPTUNKÓD _____

Bevezetés az algebra 1

3. vizsga – gyakorlat

2017-01-18

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. $2017!$ a 17 hányadik hatványával osztható?

E2. A 2017 prímszám, melynek hármasszámrendszerbeli alakjában megfordítva a jegyek sorrendjét, egy másik prímszámot kapunk. Melyik ez a szám a 10-es számrendszerben? (Használjuk a Horner-módszert.)

E3. Egy komplex szám egyik köbgyöke $1 + \sqrt{3}i$. Írjuk fel a másik két köbgyökét algebrai alakban!

E4. Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzének második sorában és harmadik oszlopában álló elemét!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E5. Tekintsük az \mathbb{R}^4 térnek az $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$ vektorok által kifeszített \mathcal{V} alterét! Írjuk fel a \mathcal{V} hipersík egyenletét!

E6. Az 5×5 -ös $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ mátrix determinánsának szorzatok összegeként való fölírásában mi lesz az $a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}$ szorzat előjele?

E7. Egy egyenletrendszer bővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{array} \right]$$

Hány megoldása van \mathbb{Z}_2 és \mathbb{Z}_3 fölött?

E8. A $x^6 - 30x^4 + 30x^3 + 15x + 90$ polinom irreducibilis-e, és ha igen, mivel igazolható?

1. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned}x &\equiv 2 \pmod{3} \\x &\equiv 2 \pmod{4} \\x &\equiv 1 \pmod{5}\end{aligned}$$

kongruenciarendszert!

2. Határozzuk meg az alábbi inkonzisztens egyenletrendszer sortérbe eső optimális megoldását!

$$\begin{aligned}y - z &= 12 \\-x + 3y - 2z &= 3 \\-x \quad + \quad z &= 0\end{aligned}$$

3. Írjuk fel annak a leképezésnek a mátrixát, mely a tér vektorait az $x + y + z = 0$ egyenletű sík mentén a $(1, -1, 1)$ irányvektorú egyenesre vetíti!

4. Kibővített euklideszi algoritmus segítségével állítsuk elő a $4x^2$ polinomot $a(x)(x^3 - x) + b(x)(x^2 + 1)$ alakban alkalmas $a(x), b(x)$ polinomokkal!

5. Tekintsük az \mathbb{R}^4 térnek az $(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$ vektorok által kifeszített \mathcal{V} alterét! Írjuk fel a \mathcal{V} -re való merőleges vetítés mátrixát!

6. Adjuk meg a primitív 8-adik egységgyökök összegét és szorzatát!

7. Az $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 2$ polinomnak gyöke az i imaginárius egység. Bontsuk fel irreducibilis tényező szorzatára a $\mathbb{Q}[x]$, az $\mathbb{R}[x]$, illetve a $\mathbb{C}[x]$ gyűrűkben.

8. Az $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (2, 1, 1, 1), \mathbf{v}_4 = (1, -1, 2, -1)$ vektorok által kifeszített altérben válasszunk e vektorok közül bázist, és írjuk fel mind a négy vektor koordinátás alakját e bázisban!