E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **2. vizsga – gyakorlat** **2017-01-11**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. A 2017 prímszám, melynek bináris alakjában megfordítva a jegyek sorrendjét, egy másik prímszámot kapunk. Melyik ez a szám a 10-es számrendszerben? (Használjuk a Horner-módszert.)

E2. Adjuk meg a $2017n + 2m = 1$ diofantoszi egyenlet egy megoldását!

E3. Adjunk meg olyan p prímet, amelyre az $x^3 + 2x + 5$ polinom reducibilis $\mathbb{Z}_p[x]$-ben!

E4. Mennyivel egyenlő $(1 + \mathrm{i})^8$. Ezt fölhasználva mennyivel egyenlő $\binom{8}{0} - \binom{8}{2} + \binom{8}{4} - \binom{8}{6} + \binom{8}{8}$?

E5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 9 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

E6. Tekintsük az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ b & 1 & c \\ d & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mikor oldható meg egyértelműen? Ekkor határozzuk meg csak az x_1 értékét!

E7. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$$

mátrix pszeudoinverzét!

E8. Írjuk fel az $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ vektor koordinátavektorát a $\mathcal{B} = \{(0, 1, -1),\ (1, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$ bázisban!

1. Határozzuk meg az alábbi inkonzisztens egyenletrendszer sortérbe eső optimális megoldását!

$$\begin{aligned} x \quad\;\; + \;\; z &= -3 \\ y + 2z &= -1 \\ -x + y + \;\; z &= -1 \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg a $108x \equiv 54 \pmod{78}$ kongruenciát, és adjuk meg az összes 0 és 50 közötti megoldását!

3. Írjuk fel annak a leképezésnek a mátrixát, mely a tér vektorait az $x + y + z = 0$ egyenletű síkra vetíti a $(0, 1, -2)$ irányvektorú egyenes mentén!

4. Határozzuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix rangját, és bontsuk fel a mátrixot $r(\mathbf{A})$ darab 1 rangú mátrix összegére!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

5. Adjuk meg az alábbi $\mathbf{B}$ mátrix LU-felbontását, és ezt felhasználva oldjuk meg a $\mathbf{Bx} = \mathbf{c}$ egyenletrendszert, ahol

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Oldjuk meg a $\dfrac{z^3 + 2i}{z^3 - 2i} = 1 - 2i$ egyenletet!

7. Kibővített euklideszi algoritmus segítségével állítsuk elő a $2x$ polinomot $a(x)(x^3 + 1) + b(x)(x^2 + 1)$ alakban alkalmas $a(x)$, $b(x)$ polinomokkal!

8. Bontsuk fel az $f(x) = 2x^4 + x^3 + 8x^2 - 2$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{Z}_3[x]$-ben!