E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 — **1. vizsga – gyakorlat** — **2017-01-04**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ az $\mathbb{R}^3$ egy bázisa, és $\mathcal{B}' = \{(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3), \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ egy másik bázis. Ha $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [1\ 1\ 1]^{\mathsf{T}}$, akkor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = ?$

E2. Írjuk fel 2017-et 7-es számrendszerben!

E3. Határozzuk meg 2017^{2017} mod 11 értékét!

E4. Határozzuk meg a $\frac{2}{-1-i}$ komplex köbgyökeinek argumentumait (irányszögeit)!

E5. Egy egyenletrendszer bővített mátrixa legyen

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Hány megoldása van az $\mathbb{R}$ és hány a $\mathbb{Z}_3$ fölött?

E6. Mennyi a $3x^5 + 6x^4 - 2x^3 + x - 9$ polinom gyökeinek összege és szorzata?

E7. Határozzuk meg az

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -1 & -8 \end{vmatrix}$$

determináns értékét!

E8. Számítsuk ki az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

blokkmátrix inverzét, ahol $\mathbf{I} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ az egységmátrix, $\mathbf{J}$ a csupa $1 \in \mathbb{F}$ elemből álló mátrix, míg $\mathbf{O}$ a zérusmátrix, és $\mathbb{F}$ tetszőleges test.

1. Adjuk meg az $576x + 224y = 64$ diofantoszi egyenlet összes megoldását!

2. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{3} \\ x &\equiv 1 \pmod{5} \\ x &\equiv 0 \pmod{7} \end{aligned}$$

kongruenciarendszert!

3. Adjuk meg az $\mathbb{R}^4$-beli $(0, 1, 2, 3)$ és $(2, 1, 0, 1)$ vektorok által kifeszített altér merőlegesének egy bázisát!

4. Bontsuk fel irreducibilis tényezők szorzatára az

$$x^4 - x^2 + 2x + 2$$

polinomot $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{C}[x]$-ben!

5. Írjuk fel azt a minimális számú tagot tartalmazó szimmetrikus polinomot, amelynek része az $x^2y^2 - xyz^2 + x$ polinom, és állítsuk elő elemi szimmetrikus polinomok összegeként!

6. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pszeudoinverzét, és adjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen optimális megoldását, ahol $\mathbf{b} = (0, 1, 2, 3)$.

7. Számítsuk ki a a Pascal-háromszögből képzett

$$\left| \binom{i+j-2}{j-1} \right|_{n\times n} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}$$

determináns értékét!

8. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix PLU-felbontását!