1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **3. vizsga – elmélet** **2017-01-18**

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. A matematikailag korrekt válaszra adunk maximális pontszámot. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Ha $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \mid bc$ és $a \nmid b$, akkor $a \mid c$.

b) Legyen R egységelemes kommutatív gyűrű, és $p \in R[x]$ zérustól és egységtől különböző polinom. Ekkor p egységszorzótól és sorrendtől eltekintve egyértelműen felbontható véges sok $R[x]$-beli irreducibilis polinom szorzatára.

c) A $2x^2 + 2$ polinom $\mathbb{Z}[x]$-ben és $\mathbb{C}[x]$-ben nem irreducibilis, de $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben igen!

d) Egy mátrix bármely két lépcsős alakjának azonos a sortere.

e) Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{10\times 4}$ és $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 4$. Ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek $\mathbf{x}_0$ egy megoldása, akkor $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$.

f) Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ három zérusvektortól különböző, lineárisan összefüggő vektor, akkor van olyan $s, t \in \mathbb{R}$ valós, hogy vagy $\mathbf{b} = s\mathbf{a}$, vagy $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$.

2. Mely hamaz(ok) jólrendezett(ek) az alábbiak közül?
$\mathbb{N}^+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $D := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$, $E := \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$.

3. Adjunk közelítő értéket az n számnál nem nagyobb pozitív prímek számára! *(2 pont)*

4. Mennyi a primitív 24-edik egységgyökök száma? *(2 pont)*

5. A felsorolt 4 struktúra mindegyikét kösse össze azzal az struktúraosztállyal, amelyikbe tartozik (többe is tartozhat)! *(2 pont)*

$\mathbb{Q}$	test
$\mathbb{Q}[x]$	
$\mathbb{Z}_7[x]$	nullosztómentes gyűrű
$\mathbb{Z}_8[x]$	egységelemes kommutatív gyűrű

6. Adjunk meg olyan 2×3-as nem nulla $\mathbf{A}$ mátrixot, melyre az $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ nem invertálható!

7. Hogyan kapható meg pszeudoinverz segítségével az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldása? *(2 pont)*

8. Milyen rangra vonatkozó feltétel fennállása esetén igaz, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható? *(2 pont)*

9. Ha $\det[\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3] = 3$, akkor mennyi $\det[\mathbf{a}_2|(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3)|\mathbf{a}_1]$? *(2 pont)*

10. Definiáljuk a primitív polinom fogalmát! *(2 pont)*

11. Definiáljuk valós mátrix nullterének fogalmát! *(2 pont)*

12. Írjuk le a kis Fermat-tétel két alakját! *(3 pont)*

13. Fogalmazzuk meg a rang–nullitási tételt (más néven dimenziótételt)! *(3 pont)*

14. Igazoljuk, hogy ha egy pozitív egész szám felbonthatatlan, akkor prím! *(5 pont)*

15. Legyen $\mathbb{F}$ test. Igazoljuk, hogy ha az $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ leképezés lineáris leképezés, akkor van olyan $\mathbf{M}$ mátrix, hogy minden $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ vektorra $f(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{x}$. *(5 pont)*