1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **2. vizsga – elmélet** **2017-01-11**

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. A matematikailag korrekt válaszra adunk maximális pontszámot. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Az $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ alakú számok gyűrűt alkotnak a szokásos műveletekre nézve, amelyben a $\pm(1+\sqrt{2})^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ számok az egységek.

b) Ha $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor az $\{na + mb \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ halmaz megegyezik az (a, b) egész számú többszöröseinek halmazával.

c) Minden $\mathbb{Z}_8[x]$-beli polinom (sorrendtől és egységszorzótól eltekintve) egyértelműen előáll irreducibilis polinomok szorzataként.

d) Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^5$ lineárisan összefüggő vektorrendszert alkotnak, akkor $\mathbf{d}$ kifejezhető $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként!

e) Van olyan $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, hogy $\mathrm{r}(\mathbf{X}^2) > \mathrm{r}(\mathbf{X})$.

f) Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m < n$ és $\dim(\mathcal{O}(\mathbf{A})) = m$, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer konzisztens bármely $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vektor esetén.

2. Mennyivel egyenlő a $\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)\Phi_4(x)\Phi_6(x)\Phi_{12}(x)$ szorzat? *(2 pont)*

3. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5\times 8}$. Mit lehet tudni $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ és $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ dimenziójának kapcsolatáról? *(2 pont)*

4. Milyen síkbeli egybevágóság felel meg a $\mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto -\overline{z}$ függvénynek? *(2 pont)*

5. Mit jelent az, hogy a determináns az első sorában lineáris? *(2 pont)*

6. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$. Melyik teret hová képzi és milyen transzformációt hajt végre az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{AA}^+\mathbf{x}$ leképezés. *(2 pont)*

7. Adjuk meg a következő kongruenciarendszer összes megoldását!

$$x \equiv 2 \pmod 3$$
$$x \equiv 2 \pmod 4$$
$$x \equiv 2 \pmod 5$$

8. $\mathbb{R}^n$ két hipersíkjának metszete hány dimenziós affin alteret alkot (vagyis egy hány dimenziós altér eltoltja), ha a két hipersík nem diszjunkt?

9. Definiáljuk a vektortér dimenziójának fogalmát! *(2 pont)*

10. Definiáljuk a szimmetrikus és a k-adik elemi szimmetrikus polinom fogalmát! *(2 pont)*

11. Mit tudunk mondani egy $\mathbb{Z}[x]$-beli polinom $\mathbb{Z}[x]$-beli és $\mathbb{Q}[x]$-beli irreducibilitásának kapcsolatáról? *(3 pont)*

12. Mit tudunk a 4 kitüntetett altér kapcsolatáról? *(3 pont)*

13. Bizonyítsuk be, hogy $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$! *(5 pont)*

14. Írjuk le és bizonyítsuk az Euler–Fermat-tételt! *(5 pont)*