1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **1. vizsga – elmélet – elmélet** **2017-01-04**

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. A matematikailag korrekt válaszra adunk maximális pontszámot. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Ha $ac \equiv bc \pmod{m}$, akkor $a \equiv b \pmod{m}$.

b) Ha egy p polinom irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben, akkor irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben is!

c) Minden harmadfokú $\mathbb{Q}$ feletti polinomnak van racionális gyöke.

d) Ha $(a, 10) = 1$, akkor $a^5 \equiv a \pmod{10}$.

e) Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineárisan összefüggő vektorrendszert alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben, akkor tetszőleges $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^4$ vektorra $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ is lineárisan összefüggő!

f) Ha egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

2. Melyik nullosztómentes az $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_6[x]$ és $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gyűrűk közül? *(2 pont)*

3. Hány megoldása van a $12x \equiv 42 \pmod{111}$ kongruenciának modulo 111? *(2 pont)*

4. Adjunk meg olyan $c \in \mathbb{Z}$ számot, amellyel az $f(x) = 3x^4 - 12x + c$ polinom kielégíti a Schönemann–Eisenstein-kritériumot! *(2 pont)*

5. Tegyük fel, hogy $\mathbf{O} \neq \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, továbbá, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek nincs megoldása. Mennyi lehet az $\mathbf{A}$ és az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrix rangja? *(2 pont)*

6. Mit mondhatunk a k, m, n számokról, ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times k}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, és a $\mathbf{BA}^T + \mathbf{B}$ mátrix létezik. *(2 pont)*

7. Adjunk meg olyan részhalmazt $\mathbb{R}^2$-ben, amely zárt az összeadásra és a pozitív skalárral való szorzásra, de nem altér! *(2 pont)*

8. Ha $\det[\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3] = 5$, akkor mennyi $\det[\mathbf{a}_1|(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3)|\mathbf{a}_2]$? *(2 pont)*

9. Definiáljuk a primitív n-edik egységgyök fogalmát! *(2 pont)*

10. Definiáljuk mátrix pszeudoinverzének fogalmát! *(2 pont)*

11. Fogalmazzuk meg a lineáris diofantoszi egyenletek megoldhatóságáról és összes megoldásáról szóló tételt! *(3 pont)*

12. Fogalmazzuk meg a lineáris algebra alaptételét! *(3 pont)*

13. Írjuk le és bizonyítsuk be a polinom többszörös gyökének és deriváltjának kapcsolatáról szóló tételt! *(5 pont)*

14. Adjuk meg és igazoljuk azt a formulát, mely megadja egy négyzetes valós mátrix inverzének i-edik sorában és j-edik oszlopában lévő elemét! *(5 pont)*