

1. Az a paraméter értékétől függően hány megoldása van a következő egyenletrendszernek ha azt (a) a valós test, (b) a $\mathbb{Z}_5$ test fölött tekintjük: (3 pont)

$$\begin{aligned}x + 2y + 2z &= 1 \\ 6x - 3y + 2z &= 1 \\ 2x + 4y + az &= a\end{aligned}$$

Megoldás: (a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & a & a \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -15 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & a-4 & a-2 \end{array} \right]$$

$a = 4$ esetén inkonzisztens (az együtthatómátrix rangja 2, a bővítetté 3), $a \neq 4$ esetén 1 megoldás van (az együtthatómátrix és a bővített mátrix rangja is 3)!

(b) 1. megoldás: Mivel az előző mátrixhoz 5-tel való osztás nélkül jutottunk, azt felhasználhatjuk a $\mathbb{Z}_5$ -ben való számoláshoz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -15 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & a-4 & a-2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-4 & a-2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-4 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$a = 4$ esetén inkonzisztens (az együtthatómátrix rangja 1, a bővítetté 2), $a \neq 4$ esetén 5 megoldás van, mivel a szabad változók száma 1, és annak értéke $\mathbb{Z}_5$ bármely eleme lehet!

(b) 2. megoldás: Elvégezhetjük az eliminációt $\mathbb{Z}_5$ -ben is:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & a & a \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & a & a \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-4 & a-2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-4 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

2. Tekintsük a $(2, 2, 4, 2)$, $(1, 1, 2, 1)$, $(1, -2, 1, 0)$, $(3, 0, 5, 2)$ vektorokat! Válasszunk ki közülük olyan vektorokat, melyek a 4 vektor által kifeszített altér bázisát alkotják! Írjuk fel mind a négy vektornak e bázisra vonatkozó koordinátás alakját! (3 pont)

Megoldás: E vektorokból, mint oszlopokból mátrixot képezve

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Bázisnak választható $\mathcal{B} = \{(2, 2, 4, 2), (1, -2, 1, 0)\}$, amelyben a vektorok koordinátás alakja rendre $(1, 0)_{\mathcal{B}}$, $(\frac{1}{2}, 0)_{\mathcal{B}}$, $(0, 1)_{\mathcal{B}}$, $(1, 1)_{\mathcal{B}}$. Ez a redukált lépcsős alak első 2 sorából leolvasható.

3. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben alteret alkotnak azok a mátrixok, amelyek felcserélhetők a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixszal! Adjuk meg ennek az altérnek egy bázisát! (3 pont)

Megoldás: Mivel

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ezért $a = d$ és $c = 0$ (b -re nem kaptunk feltételt, tehát tetszőleges). Így e mátrixok általános alakja: $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Megmutatjuk, hogy e mátrixok alteret alkotnak $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben.

Ilyen alakú mátrixok összege és skalárszorosa is ilyen alakú (azaz bal alsó sarkában 0 van, és átlójában azonos elemek), így e mátrixok alteret alkotnak. Ennek az altérnek bázisa $\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \}$, ugyanis minden $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ mátrix felírható ezek (a és b együtthatós) lineáris kombinációjaként, és a felírás egyértelmű, mert az együtthatók leolvashatók a mátrix elemeiből.

2. bizonyítás arra, hogy alteret alkotnak: Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. A $\mathbf{O}$ mátrix nyilván felcserélhető $\mathbf{A}$ -val, és ha $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ is felcserélhető $\mathbf{A}$ -val, azaz $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$ és $\mathbf{AY} = \mathbf{YA}$, akkor $\mathbf{A}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{AX} + \mathbf{AY} = \mathbf{XA} + \mathbf{YA} = (\mathbf{X} + \mathbf{Y})\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}(c\mathbf{X}) = c\mathbf{AX} = c\mathbf{XA} = (c\mathbf{X})\mathbf{A}$, azaz az $\mathbf{A}$ -val felcserélhető mátrixok összege és skalárszorosa is felcserélhető $\mathbf{A}$ -val. Tehát az $\mathbf{A}$ -val felcserélhető mátrixok halmaza nem üres, és zárt az összeadás és skalárral szorzás műveletére, ezért alteret alkotnak.

4. Számítsuk ki a következő mátrix PLU-felbontását!

(4 pont)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: E mátrixnak több különböző PLU-felbontása is van, ezek egyike:

$$\begin{array}{c} \textcolor{red}{1} \\ \textcolor{red}{2} \\ \textcolor{red}{3} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \textcolor{red}{3} \\ \textcolor{red}{2} \\ \textcolor{red}{1} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \textcolor{red}{3} \\ \textcolor{red}{2} \\ \textcolor{red}{1} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \textcolor{red}{3} \\ \textcolor{red}{1} \\ \textcolor{red}{2} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \textcolor{green}{2} & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \textcolor{red}{3} \\ \textcolor{red}{1} \\ \textcolor{red}{2} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \textcolor{green}{2} & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Legyen az áttérmátrix két bázis között

$$\mathbf{T}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel a $\mathbf{T}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ áttérmátrixot, és adjuk meg a $(\mathbf{v})_{\mathcal{C}}$ vektor koordinátáit, ha $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = (a, b, c)$.

(3 pont)

Megoldás: Mivel $\mathbf{T}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{T}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}^{-1}$, ezért csak egy invertálást kell elvégezni:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Tehát

$$\mathbf{T}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b + c \\ a + b + c \\ a + c \end{bmatrix}.$$

6. Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix bázisfelbontását, és ennek segítségével bontsuk fel az $\mathbf{A}$ mátrixot minimális számú diád összegére!

(4 pont)

Megoldás: A redukált lépcsős alakból leolvasható a bázisfelbontás, abból pedig a diádok összegére bontás:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$