E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **3. vizsga – gyakorlat** **2017-01-18**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. 2017! a 17 hányadik hatványával osztható?

124

E2. A 2017 prímszám, melynek hármas számrendszerbeli alakjában megfordítva a jegyek sorrendjét, egy másik prímszámot kapunk. Melyik ez a szám a 10-es számrendszerben? (Használjuk a Horner-módszert.)

953

E3. Egy komplex szám egyik köbgyöke $1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$. Írjuk fel a másik két köbgyökét algebrai alakban!

-2, $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

E4. Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzének második sorában és harmadik oszlopában álló elemét!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-3

E5. Tekintsük az $\mathbb{R}^4$ térnek az $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,1)$, $(0,0,1,0)$ vektorok által kifeszített $\mathcal{V}$ alterét! Írjuk fel a $\mathcal{V}$ hipersík egyenletét!

$x_2 - x_4 = 0$ vagy $y - w = 0$

E6. Az 5×5-ös $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ mátrix determinánsának szorzatok összegeként való fölírásában mi lesz az $a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}$ szorzat előjele?

-1

E7. Egy egyenletrendszer bővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

Hány megoldása van $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött?

4, 3

E8. Az $x^6 - 30x^4 + 30x^3 + 15x + 90$ polinom irreducibilis-e, és ha igen, mivel igazolható?

irreducibilis, $p=5$ S–E-kritérium

1. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 2 \pmod 4 \\ x &\equiv 1 \pmod 5 \end{aligned}$$

kongruenciarendszert!

$x \equiv 26 \pmod{60}$

2. Határozzuk meg az alábbi inkonzisztens egyenletrendszer sortérbe eső optimális megoldását!

$$\begin{aligned} y - z &= 12 \\ -x + 3y - 2z &= 3 \\ -x + z &= 0 \end{aligned}$$

$(1, 1, -2)$

3. Írjuk fel annak a leképezésnek a mátrixát, mely a tér vektorait az $x + y + z = 0$ egyenletű sík mentén a $(1, -1, 1)$ irányvektorú egyenesre vetíti!

$(1, -1, 0) \mapsto (0, 0, 0)$, $(1, 0, -1) \mapsto (0, 0, 0)$, $(1, -1, 1) \mapsto (1, -1, 1)$

$$\mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Kibővített euklideszi algoritmus segítségével állítsuk elő a $4x^2$ polinomot $a(x)(x^3 - x) + b(x)(x^2 + 1)$ alakban alkalmas $a(x)$, $b(x)$ polinomokkal!

Néhány megoldás (egyszerűbb megoldást kapunk, ha észrevesszük, hogy az euklideszi algoritmus előbb is befejezhető):
$a(x) = -2x$, $b(x) = 2x^2$
$a(x) = -x^3 - 3x$, $b(x) = x^4 + x^2$
$a(x) = 2x^3$, $b(x) = -2x^4 + 4x^2$

5. Tekintsük az $\mathbb{R}^4$ térnek az $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$ vektorok által kifeszített $\mathcal{V}$ alterét! Írjuk fel a $\mathcal{V}$-re való merőleges vetítés mátrixát!

Az $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal$ képlettel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Adjuk meg a primitív 8-adik egységgyökök összegét és szorzatát!

0, 1

7. Az $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 2$ polinomnak gyöke az i imaginárius egység. Bontsuk fel irreducibilis tényezők szorzatára a $\mathbb{Q}[x]$, az $\mathbb{R}[x]$, illetve a $\mathbb{C}[x]$ gyűrűkben.

Mivel az i gyök, ezért a polinom osztható x^2+1-gyel $\mathbb{Q}[x]$-ben:
$\mathbb{Q}[x]$: $(x^2 + 1)(x^2 + 2x - 2)$,
$\mathbb{R}[x]$: $(x^2 + 1)(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})$,
$\mathbb{C}[x]$: $(x + \mathrm{i})(x - \mathrm{i})(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})$

8. A $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (1, -1, 2, -1)$ vektorok által kifeszített altérben válasszunk e vektorok közül bázist, és írjuk fel mind a négy vektor koordinátás alakját e bázisban!

Ha a bázis $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$,
$[\mathbf{v}_1]_\mathcal{B} = (1, 0)$, $[\mathbf{v}_2]_\mathcal{B} = (0, 1)$, $[\mathbf{v}_3]_\mathcal{B} = (1, 1)$, $[\mathbf{v}_4]_\mathcal{B} = (-1, 2)$