E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** ____________

Bevezetés az algebrába 1 **2. vizsga – gyakorlat** **2017-01-11**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. A 2017 prímszám, melynek bináris alakjában megfordítva a jegyek sorrendjét, egy másik prímszámot kapunk. Melyik ez a szám a 10-es számrendszerben? (Használjuk a Horner-módszert.)

1087

E2. Adjuk meg a $2017n + 2m = 1$ diofantoszi egyenlet egy megoldását!

$n = 1$, $m = -2016/2 = -1008$.

E3. Adjunk meg olyan p prímet, amelyre az $x^3 + 2x + 5$ polinom reducibilis $\mathbb{Z}_p[x]$-ben!

pl. $p = 5$

E4. Mennyivel egyenlő $(1 + \mathrm{i})^8$. Ezt fölhasználva mennyivel egyenlő $\binom{8}{0} - \binom{8}{2} + \binom{8}{4} - \binom{8}{6} + \binom{8}{8}$?

Mindkettő 16

E5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 9 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

-3

E6. Tekintsük az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ b & 1 & c \\ d & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mikor oldható meg egyértelműen? Ekkor határozzuk meg csak az x_1 értékét!

ha $a \neq d$, $x_1 = 1/(a - d)$

E7. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$$

mátrix pszeudoinverzét!

$1/9\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$

E8. Írjuk fel az $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ vektor koordinátavektorát a $\mathcal{B} = \{(0, 1, -1),\ (1, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$ bázisban!

$(0, 1, 1)$

1. Határozzuk meg az alábbi inkonzisztens egyenletrendszer sortérbe eső optimális megoldását!

$$\begin{aligned} x \quad\quad + \; z &= -3 \\ y + 2z &= -1 \\ -x + y + \; z &= -1 \end{aligned}$$

$(-1, 0, -1)$

2. Oldjuk meg a $108x \equiv 54 \pmod{78}$ kongruenciát, és adjuk meg az összes 0 és 50 közötti megoldását!

$x \equiv 7 \pmod{13}$, $x = 7, 20, 33, 46$
(érdemes először 6-tal egyszerűsíteni és utána számolni)

3. Írjuk fel annak a leképezésnek a mátrixát, mely a tér vektorait az $x + y + z = 0$ egyenletű síkra vetíti a $(0, 1, -2)$ irányvektorú egyenes mentén!

$(1, -1, 0) \mapsto (1, -1, 0)$, $(1, 0, -1) \mapsto (1, 0, -1)$, $(0, 1, -2) \mapsto (0, 0, 0)$

$$\mathbf{X}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix rangját, és bontsuk fel a mátrixot $r(\mathbf{A})$ darab 1 rangú mátrix összegére!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 2$, a bázisfelbontásból:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Adjuk meg az alábbi $\mathbf{B}$ mátrix LU-felbontását, és ezt felhasználva oldjuk meg a $\mathbf{Bx} = \mathbf{c}$ egyenletrendszert, ahol

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A megoldás $\mathbf{x} = (-3, 5, -1)$, az LU-felbontás:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Oldjuk meg a $\dfrac{z^3 + 2i}{z^3 - 2i} = 1 - 2i$ egyenletet!

$(1 + \mathrm{i})\varepsilon$, ahol ε végigfut a harmadik egységgyökökön (algebrai és trigonometriai alakban is megadható).

7. Kibővített euklideszi algoritmus segítségével állítsuk elő a $2x$ polinomot $a(x)(x^3 + 1) + b(x)(x^2 + 1)$ alakban alkalmas $a(x)$, $b(x)$ polinomokkal!

$a(x) = x^2 + x$, $b(x) = -x^3 - x^2 + x$
egy másik megoldás:
$a(x) = x - 1$, $b(x) = -x^2 + x + 1$

8. Bontsuk fel az $f(x) = 2x^4 + x^3 + 8x^2 - 2$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{Z}_3[x]$-ben!

$(x^3 + 4x - 2)(2x + 1)$, $-(x^2 + x - 1)(x - 1)^2$