E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **1. vizsga – gyakorlat** **2017-01-04**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ az $\mathbb{R}^3$ egy bázisa, és $\mathcal{B}' = \{(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3), \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ egy másik bázis. Ha $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [1\ 1\ 1]^{\mathsf{T}}$, akkor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} =$?

$(1, 0, 0)$

E2. Írjuk fel 2017-et 7-es számrendszerben!

5611

E3. Határozzuk meg 2017^{2017} mod 11 értékét!

5

E4. Határozzuk meg a $\frac{2}{-1-i}$ komplex köbgyökeinek argumentumait (irányszögeit)!

$45°$, $165°$, $285°$, vagy $\pi/4 + 2k\pi/3$, $k = 0, 1, 2$

E5. Egy egyenletrendszer bővített mátrixa legyen

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Hány megoldása van az $\mathbb{R}$ és hány a $\mathbb{Z}_3$ fölött?

1, 9

E6. Mennyi a $3x^5 + 6x^4 - 2x^3 + x - 9$ polinom gyökeinek összege és szorzata?

összege $-6/3 = -2$, szorzata $(-1)^5(-9)/3 = 3$.

E7. Határozzuk meg az

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -1 & -8 \end{vmatrix}$$

determináns értékét!

Vandermonde-determináns, értéke -72.

E8. Számítsuk ki az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

blokkmátrix inverzét, ahol $\mathbf{I} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ az egységmátrix, $\mathbf{J}$ a csupa $1 \in \mathbb{F}$ elemből álló mátrix, míg $\mathbf{O}$ a zérusmátrix, és $\mathbb{F}$ tetszőleges test.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{J} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

1. Adjuk meg az $576x+224y=64$ diofantoszi egyenlet összes megoldását!

$(576,224)=32,\ 2\cdot 576-5\cdot 224=32$

2. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x&\equiv 2 \pmod 3\\ x&\equiv 1 \pmod 5\\ x&\equiv 0 \pmod 7\end{aligned}$$

kongruenciarendszert!

56

3. Adjuk meg az $\mathbb{R}^4$-beli $(0,1,2,3)$ és $(2,1,0,1)$ vektorok által kifeszített altér merőlegesének egy bázisát!

$(1,-2,1,0),\ (1,-3,0,1)$ (egy másik megoldás: $(1,0,3,-2),\ (0,1,1,-1)$)

4. Bontsuk fel irreducibilis tényezők szorzatára az

$$x^4-x^2+2x+2$$

polinomot $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{C}[x]$-ben!

$\mathbb{R}[x]$: $(x+1)^2(x^2-2x+2)$,
$\mathbb{C}[x]$: $(x+1)^2(x-1-\mathrm{i})(x-1+\mathrm{i})$.

5. Írjuk fel azt a minimális számú tagot tartalmazó szimmetrikus polinomot, amelynek része az $x^2y^2-xyz^2+x$ polinom, és állítsuk elő elemi szimmetrikus polinomok összegeként!

$x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2-x^2yz-xy^2z-xyz^2+x+y+z=e_2^2-3e_1e_3+e_1$

6. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

pszeudoinverzét, és adjuk meg az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen optimális megoldását, ahol $\mathbf{b}=(0,1,2,3)$.

$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1/2&0&1/2&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{x}=(1,1,2)$.

7. Számítsuk ki a a Pascal-háromszögből képzett

$$\left|\binom{i+j-2}{j-1}\right|_{n\times n}=\begin{vmatrix}\binom{0}{0}&\binom{1}{1}&\cdots&\binom{n-1}{n-1}\\\binom{1}{0}&\binom{2}{1}&\cdots&\binom{n}{n-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\binom{n-1}{0}&\binom{n}{1}&\cdots&\binom{2n-2}{n-1}\end{vmatrix}$$

determináns értékét!

Az utolsó sorral kezdve minden sorból vonjuk ki a fölötte lévőt és alkalmazzuk a binomiális együtthatók addiciós képletét. A válasz 1.

8. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}$$

mátrix PLU-felbontását!

1. megoldás:
$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1/2&1&0\\0&1/2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&-1/2\\0&0&9/4\end{bmatrix},$$
2. megoldás:
$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&9\end{bmatrix}.$$