

1	2-8	9-12	13-	Σ
---	-----	------	-----	---

NÉV _____

NEPTUNKÓD _____

Bevezetés az algebra 1

3. vizsga – elmélet

2017-01-18

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. A matematikailag korrekt válaszra adunk maximális pontszámot. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A választásokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! (6 pont)

a) Ha $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \mid bc$ és $a \nmid b$, akkor $a \mid c$. H

b) Legyen R egységelemes kommutatív gyűrű, és $p \in R[x]$ zérustól és egységtől különböző polinom. Ekkor p egységszorozótól és sorrendtől eltekintve egyértelműen felbontható véges sok $R[x]$ -beli irreducibilis polinom szorzatára. H

c) A $2x^2 + 2$ polinom $\mathbb{Z}[x]$ -ben és $\mathbb{C}[x]$ -ben nem irreducibilis, de $\mathbb{Q}[x]$ -ben és $\mathbb{R}[x]$ -ben igen! I

d) Egy mátrix bármely két lépcsős alakjának azonos a sortere. I

e) Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{10 \times 4}$ és $r(\mathbf{A}) = 4$. Ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek $\mathbf{x}_0$ egy megoldása, akkor $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$. I

f) Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ három zérusvektortól különböző, lineárisan összefüggő vektor, akkor van olyan $s, t \in \mathbb{R}$ valós, hogy vagy $\mathbf{b} = s\mathbf{a}$, vagy $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. I

2. Mely hamaz(ok) jólrendezett(ek) az alábbiak közül?
 $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $D := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$, $E := \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$.

$\mathbb{N}^+$, E

3. Adjunk közelítő értéket az n számnál nem nagyobb pozitív prímek számára! (2 pont)

$n / \ln n$

4. Mennyi a primitív 24-edik egységgyökök száma? (2 pont)

8

5. A felsorolt 4 struktúra mindegyikét kösse össze azzal az struktúraosztállyal, amelyikbe tartozik (többbe is tartozhat)! (2 pont)

$\mathbb{Q}$	test
$\mathbb{Q}[x]$	nullosztómentes gyűrű
$\mathbb{Z}_7[x]$	egységelemes kommutatív gyűrű
$\mathbb{Z}_8[x]$	

6. Adjunk meg olyan 2×3 -as nem nulla $\mathbf{A}$ mátrixot, melyre az $\mathbf{AA}^T$ nem invertálható!

bármilyen 1-rangú mátrix jó

7. Hogyan kapható meg pseudoinverz segítségével az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldása? (2 pont)

$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$

8. Milyen rangra vonatkozó feltétel fennállása esetén igaz, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható? (2 pont)

$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) =$ ismeretlenek száma

9. Ha $\det[\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3] = 3$, akkor mennyi $\det[\mathbf{a}_2|(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3)|\mathbf{a}_1]$? (2 pont)

9

10. Definiáljuk a primitív polinom fogalmát!

(2 pont)

11. Definiáljuk valós mátrix nullterének fogalmát!

(2 pont)

12. Írjuk le a kis Fermat-tétel két alakját!

(3 pont)

13. Fogalmazzuk meg a lineáris leképezésekre vonatkozó rang–nullitási tételt (más néven dimenziótételt)! (3 pont)

14. Igazoljuk, hogy ha egy pozitív egész szám felbonthatatlan, akkor prím!

(5 pont)

15. Legyen $\mathbb{F}$ test. Igazoljuk, hogy ha az $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ leképezés lineáris leképezés, akkor van olyan $\mathbf{M}$ mátrix, hogy minden $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ vektorra $f(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{x}$. (5 pont)