

NÉV \_\_\_\_\_

NEPTUNKÓD \_\_\_\_\_

**Bevezetés az algebra 1**

**2. vizsga – elmélet**

**2017-01-11**

*Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. A matematikailag korrekt válaszra adunk maximális pontszámot. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A választásokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!*

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! (6 pont)

a) Az  $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  alakú számok gyűrűt alkotnak a szokásos műveletekre nézve, amelyben a  $\pm(1 + \sqrt{2})^n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) számok az egységek. I

b) Ha  $a, b \in \mathbb{Z}$ , akkor az  $\{na + mb \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$  halmaz megegyezik az  $(a, b)$  egész számú többszöröseinek halmazával. I

c) Minden  $\mathbb{Z}_8[x]$ -beli polinom (sorrendtől és egységsszorozótól eltekintve) egyértelműen előáll irreducibilis polinomok szorzataként. H

d) Ha  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^5$  lineárisan összefüggő vektorrendszert alkotnak, akkor  $\mathbf{d}$  kifejezhető  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  lineáris kombinációjaként! H

e) Van olyan  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix, hogy  $r(\mathbf{X}^2) > r(\mathbf{X})$ . H

f) Ha  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m < n$  és  $\dim(\mathcal{O}(\mathbf{A})) = m$ , akkor az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  egyenletrendszer konzisztens bármely  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  vektor esetén. I

2. Mennyivel egyenlő a  $\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)\Phi_4(x)\Phi_6(x)\Phi_{12}(x)$  szorzat? (2 pont)  $x^{12} - 1$

3. Legyen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5 \times 8}$ . Mit lehet tudni  $\mathcal{O}(\mathbf{A})$  és  $\mathcal{N}(\mathbf{A})$  dimenziójának kapcsolatáról? (2 pont)  $\dim(\mathcal{O}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = 8.$

4. Milyen síkbeli egybevágóság felel meg a  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto -\bar{z}$  függvénynek? (2 pont) tükrözés az imaginárius (azaz az  $y$ -)tengelyre.

5. Mit jelent az, hogy a determináns az első sorában lineáris? (2 pont) a többi sor rögzítése mellett tetszőleges  $c, d$  konstansokkal és  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \dots$  sorvektorokkal

$$\begin{vmatrix} c\mathbf{u} + d\mathbf{v} \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \vdots \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \vdots \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \vdots \end{vmatrix}$$

6. Legyen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ . Melyik teret hová képi és milyen transzformációt hajt végre az  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{AA}^+\mathbf{x}$  leképezés. (2 pont)  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{O}(\mathbf{A})$ , merőleges vetítés.

7. Adjuk meg a következő kongruenciarendszer összes megoldását!  $2 + 60t$ , azaz  $x \equiv 2 \pmod{60}$

$x \equiv 2 \pmod{3}$

$x \equiv 2 \pmod{4}$

$x \equiv 2 \pmod{5}$

8.  $\mathbb{R}^n$  két hipersíkjának metszete hány dimenziós affin altérrel alkot (vagyis egy hány dimenziós altér eltoltja), ha a két hipersík nem diszjunkt?  $n - 2$  ha különbözőek,  $n - 1$ , ha azonosak.

9. Definiáljuk a vektortér dimenziójának fogalmát!

(2 pont)

10. Definiáljuk a szimmetrikus és a  $k$ -adik elemi szimmetrikus polinom fogalmát!

(2 pont)

11. Mit tudunk mondani egy  $\mathbb{Z}[x]$ -beli polinom  $\mathbb{Z}[x]$ -beli és  $\mathbb{Q}[x]$ -beli irreducibilitásának kapcsolatáról? (3 pont)

12. Mit tudunk a 4 kitüntetett altér kapcsolatáról?

(3 pont)

13. Bizonyítsuk be, hogy  $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$ !

(5 pont)

14. Írjuk le és bizonyítsuk az Euler–Fermat-tételt!

(5 pont)