BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Bevezetés az algebrába 1

BMETE92AX23

Lineáris leképezések

H406 – 2016-11-28

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Geometriai transzformációk

Geometria $\mathbb{R}^n$-ben

m A geomtriai nyelvezet pont $\mapsto$ pont transzformációit a tekinthetjük vektor $\mapsto$ vektor leképezéseknek.

D Tetszőleges $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vektor hossza $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

D Két pont távolsága (két vektor távolsága!) $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

D Két vektor szöge:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|},$$

mivel a $[0, \pi]$ intervallumon a koszinusz függvény kölcsönösen egyértelmű.

m E definíció értelmességéhez igazolni kell, hogy a fenti tört értéke a $[-1, 1]$ intervallumba esik!

T **Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség**

Két vektor skaláris szorzatának abszolút értéke sosem nagyobb abszolút értékeik szorzatánál, azaz $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *esetén*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *lineárisan összefüggők, azaz ha egyik vektor a másik skalárszorosa.*

m 2D- és 3D-ben tudjuk: $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}||\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\angle| \leqslant |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$, de ezt itt nem használható.

B Tegyük fel először, hogy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ekkor a tétel állításának mindkét része nyilván igaz, hisz egyenlőség áll fenn, és a két vektor lineárisan összefüggő.

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség 2

- Ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, akkor legyen $\mathbf{e} = {}^{\mathbf{v}}/_{|\mathbf{v}|}$ a $\mathbf{v}$ irányú egységvektor. Bármely vektorra (így az $\mathbf{u}$ vektor $\mathbf{e}$ egyenesére merőleges összetevőjének hosszára):

$$\begin{aligned}
0 &\leq |\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}|^2 && |\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \text{ alkalmazása} \\
&= (\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}) \cdot (\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}) && \text{disztributivitás alkalmazása} \\
&= |\mathbf{u}|^2 - 2\,|\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}|^2 + |\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}|^2 && \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \text{ alkalmazása} \\
&= |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}|^2 \\
&= |\mathbf{u}|^2 - \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2} && \mathbf{e} = {}^{\mathbf{v}}/_{|\mathbf{v}|} \text{ visszahelyettesítés e.}
\end{aligned}$$

- Átrendezés után a képlet igazolva ✓
- Másrészt $0 = |\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}| \iff \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} \iff \mathbf{u}$ és $\mathbf{e}$ párhuzamosak $\iff$ $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ skalárszorosa $\iff$ a két vektor lineárisan összefüggő.

T **Háromszög-egyenlőtlenség**

Bármely két $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *vektorra* $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

B Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldalán nemnegatív szám áll, ezért vele ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk, ha mindkét oldalt négyzetre emeljük.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\
&= |\mathbf{u}|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2 \qquad \text{ld. Pitagorasz-tétel} \\
&\leq |\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 \\
&\leq |\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 \\
&= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2 .
\end{aligned}$$

Egybevágóság

D $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egybevágóság, ha bármely két $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $|T(\mathbf{p}) - T(\mathbf{q})| = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$ (vagyis e helyvektorok végpontainak távolsága nem változik).

P L! $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. A $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{a}$ leképezés, azaz az eltolás egybevágóság, ui. $|T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})| = |(\mathbf{v} + \mathbf{a}) - (\mathbf{w} - \mathbf{a})| = |\mathbf{v} - \mathbf{w}|$.

Á Egybevágóságok kompozíciója és inverze is egybevágóság.

Á Minden egybevágóság felírható egy origót helyben hagyó egybevágóság és egy eltolás kompozíciójaként.

B Legyen T egybevágóság, és $T(\mathbf{0}) = \mathbf{a}$. Ekkor $T(\mathbf{v}) = (T(\mathbf{v}) - \mathbf{a}) + \mathbf{a}$, ahol $T(\mathbf{v}) - \mathbf{a}$ helyben hagyja az origót és egybevágóság.

P Állítsuk elő az $(1, 1)$ pont körüli $90°$-os forgatást egy origót helyben hagyó egybevágóság és egy eltolás kompozíciójaként.

M $T : \mathbf{0} \mapsto (2, 0)$, az $A(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}) - (2, 0)$ leképezésre: $\mathbf{0} \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{i} \mapsto \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \mapsto -\mathbf{i}$, tehát A az origó körüli $90°$-os forgatás.

Ortogonális transzformációk

D $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ortogonális, ha $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ és T távolságtartó.

T Ha T ortogonális tranformáció, akkor

1. hossztartó: $|T(\mathbf{v})| = |\mathbf{v}|$,
2. additív (összegtartó): $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$,
3. homogén: $T(\lambda\mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v})$,
4. skalárszorzattartó: $T(\mathbf{v}) \cdot T(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$,
5. szögtartó: $(T(\mathbf{v}), T(\mathbf{w}))_\angle = (\mathbf{v}, \mathbf{w})_\angle$,
6. bázist bázisba visz,
7. ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

B

1. $|T(\mathbf{v})| = |T(\mathbf{v}) - \mathbf{0}| = |T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{0})| = |\mathbf{v} - \mathbf{0}| = |\mathbf{v}|$;
2. parallelogrammát egybevágó parallelogrammába visz;
3. trivi
4. $(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 = \mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{w}^2$, $\rightsquigarrow \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \frac{1}{2}(|\mathbf{v}+\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2)$;
5. az előzőkből;
6. $\mathbf{0} = \sum_i \lambda_i T(\mathbf{v}_i) = T(\sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i) \rightsquigarrow |\sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i| = |T(\sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i)| = 0 \rightsquigarrow$ $\lambda_i = 0$ minden i-re;
7. 1-, 4-, 6-ból.

Ortogonális mátrix

D Egy $\mathbf{A}$ mátrixot ortogonálisnak nevezünk, ha az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezés ortogonális.

T Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}$ ortogonális,
2. $\mathbf{A}$ oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben,
3. $\mathbf{A}$ sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben,
4. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^\mathsf{T}$.

B (1. $\Rightarrow$ 2.) Ortogonális leképezés az $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ ortonormált bázist ortonormált bázisba viszi, ami az $\mathbf{A}$ oszlopvektoraiból áll.

(2. $\Rightarrow$ 4.) $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{ij} = (\mathbf{A}^T)_{i*}(\mathbf{A})_{*j} = (\mathbf{A})_{*i} \cdot (\mathbf{A})_{*j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$

(4. $\Rightarrow$ 1.) Tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$-re:

$$|\mathbf{Ax}|^2 = (\mathbf{Ax})^T(\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{x}^T\mathbf{Ix} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2,$$

$\rightsquigarrow$ az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ hossztartó $\rightsquigarrow$ ortogonális.

(2. $\Leftrightarrow$ 3.) Az eddigek szerint $\mathbf{A}$ ortogonális $\iff$ $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$ $\iff$ $\mathbf{AA}^T = \mathbf{I}$ $\iff$ $\mathbf{A}^T$ oszlopvektorai ONB-t alkotnak $\iff$ $\mathbf{A}$ sorvektorai ONB-t alkotnak

Mátrix- és lineáris leképezések

A mátrixleképezés fogalma

D Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, az $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezést az $\mathbf{A}$-hoz tartozó mátrixleképezésnek nevezzük.

D Képtér az A leképezés értékkészlete: $\mathrm{Im}(A)$ $(\mathrm{Im}(A) \leqslant \mathbb{F}^m)$
$\mathrm{Im}(A) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$ (a leképezés képtere = a mátrix oszlopterével)

D Magtér (kernel): azoknak a vektoroknak az altere, melyet A a nullvektorba visz, jelölése $\mathrm{Ker}(A)$. $(\mathrm{Ker}(A) \leqslant \mathbb{F}^n)$
$\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$ (a leképezés magtere = a mátrix nullterével)

T L! $\mathbb{F}$ test, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{F}^{m\times k}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{F}^{k\times n}$, $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, A, B, C, X, Y, S, T a hozzájuk tartozó mátrixleképezések, $c \in \mathbb{F}$. Ekkor

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \iff A + B = C$, és
2. $c\mathbf{A} = \mathbf{C} \iff cA = C$.
3. $\mathbf{XY} = \mathbf{C} \iff X \circ Y = C$ (mátrixszorzás – fv. kompozíciója)
4. $\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1} \iff S = T^{-1}$ (mátrix inverze – függvény inverze)

A mátrixleképezés

P Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, és legyen

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

Mutassuk meg, hogy az A mátrixleképezés, azaz létezik egy olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

M A vektori szorzás koordinátás alakja alapján

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} & - a_3x_2 + a_2x_3 \\ a_3x_1 & - a_1x_3 \\ - a_2x_1 + a_1x_2 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

A mátrixleképezés tulajdonságai

T Legyen $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ egy tetszőleges mátrixleképezés, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}^n$, $c, d \in \mathbb{F}$.

1. $A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$, azaz A megőrzi a lineáris kombinációt.
2. Az A homogén és additív leképezés, azaz

$$\begin{aligned} A(c\mathbf{x}) &= cA(\mathbf{x}), && \text{(a leképezés homogén), és} \\ A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}), && \text{(a leképezés additív).} \end{aligned}$$

3. $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
4. Tetszőleges altér képe altér.
5. Tetszőleges affin altér képe affin altér.

Lineáris leképezés

D H_1 és H_2 mindegyikének elemein értelmezve van egy asszociatív összeadás és egy „skalárral való szorzás” művelet (pl. vektortér).
Azt mondjuk, hogy egy $A : H_1 \to H_2$ leképezés lineáris, ha homogén és additív, azaz ha tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H_1$ elemre és c skalárra

$$A(c\mathbf{x}) = cA(\mathbf{x}) \qquad (A \text{ homogén,})$$
$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} \qquad (A \text{ additív.})$$

$H_1 = H_2$ esetén lineáris transzformációnak is nevezzük.

P A síkbeli vektorok egy rögzített O pont körüli forgatása, egy egyenesre való tükrözése és merőleges vetítése lineáris leképezés.

P A $D : f \mapsto f'$ és az $I : f \mapsto \int_a^b f$ leképezések lineáris leképezések.

Lineáris leképezés ekvivalens definíciói

Á Egy tetszőleges $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ leképezésre az alábbi állítások ekvivalensek:

1. A lineáris, azaz homogén és additív.
2. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}^n$ és $c, d \in \mathbb{F}$ esetén
$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$$
3. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}^n$ és $c \in \mathbb{F}$ esetén
$$A(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$$
4. „Megőrzi” a lineáris kombinációt, azaz tetszőleges $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{F}^n$ vektorokra és $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{F}$ skalárra
$$A(c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1A\mathbf{x}_1 + \cdots + c_kA\mathbf{x}_k.$$

Az $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ leképezések mátrixleképezések

T Legyen $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ egy tetszőleges függvény. Az A pontosan akkor lineáris leképezés, ha létezik egy olyan $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix, hogy az A függvény megegyezik az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezéssel. Ekkor

$$\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1 | A\mathbf{e}_2 | \dots | A\mathbf{e}_n],$$

ahol $\mathbf{e}_i$ az i-edik standard egységvektor ($i = 1, 2, \dots, n$).

B (A mátrixleképezés $\Rightarrow$ A lineáris) ✓

(A mátrixleképezés $\Leftarrow$ A lineáris)

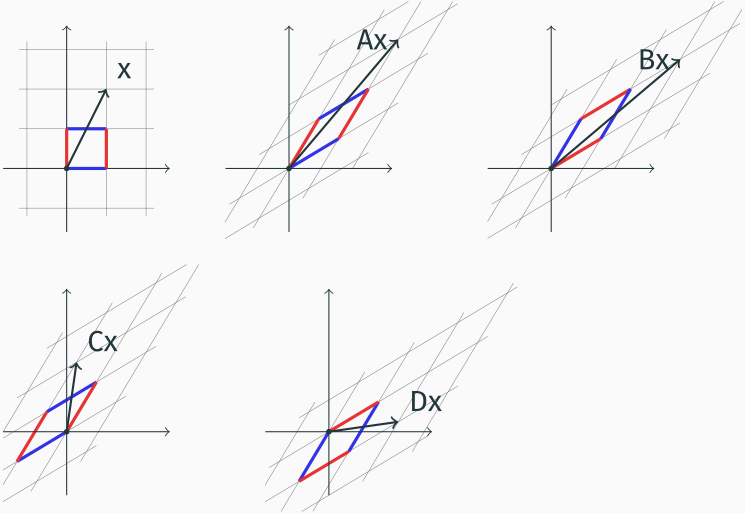
$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= x_1 A\mathbf{e}_1 + x_2 A\mathbf{e}_2 + \dots + x_n A\mathbf{e}_n \\
&= \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & \dots & A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Megjegyzések

- Lineáris leképezésekről olyan esetben is beszélhetünk, amikor a leképezésnek nincs mátrixa (pl. végtelen dimenziós vektorterek esetén).
- Különbség van a lineáris leképezés és a mátrixleképezés közt $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ függvények esetén is:
  A lineáris leképezés független a bázistól, az csak maga a függvény, mely megadja, hogy melyik vektornak melyik vektor a képe.
  A mátrixleképezés mindig valamely bázisra vonatkozik. Egy lineáris leképezéshez minden bázisban tartozik egy mátrixleképezés, melynek mátrixa függ a bázistól.
- A lineáris $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ leképezések azonosak az $x \mapsto cx$ függvényekkel, ahol $c \in \mathbb{F}$ konstans.

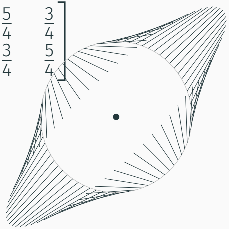
A mátrixleképezés szemléltetése négyzetráccsal

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

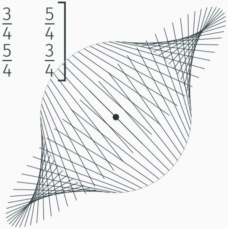


A mátrixleképezés szemléltetése egységkör-ábrával

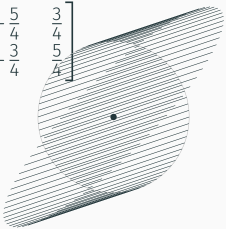
$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$



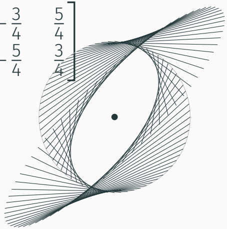
$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$



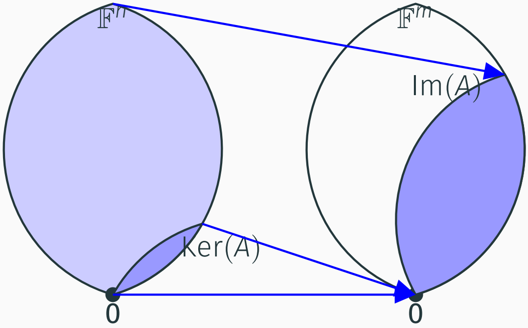
$$C = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$



$$D = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$



A lineáris leképezés szemléltetése levéldiagrammal



Mátrix nyoma

D Négyzetes mátrix nyomán főátlójában lévő elemeinek összegét értjük. jelölés: $\operatorname{trace}(\mathbf{A})$.

Á A nyom $\mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ lineáris leképezés, mert

1. $\operatorname{trace}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \operatorname{trace}\mathbf{A} + \operatorname{trace}\mathbf{B}$
2. $\operatorname{trace}(c\mathbf{A}) = c\operatorname{trace}\mathbf{A}$

T $\operatorname{trace}(\mathbf{AB}) = \operatorname{trace}(\mathbf{BA})$

B
$$\begin{aligned}
\operatorname{trace}(\mathbf{AB}) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}_{*i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{B}_{j*}\mathbf{A}_{*j} \\
&= \operatorname{trace}(\mathbf{BA}).
\end{aligned}$$

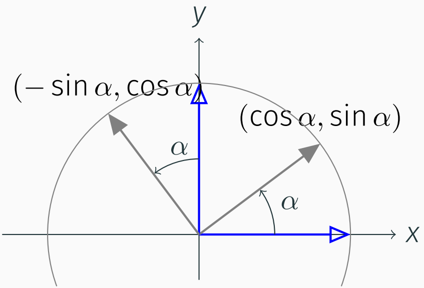
T $\operatorname{trace}(\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2$

A 2D és 3D tér transzformációi

Forgatás

T A sík vektorait egy pont körül α szöggel elforgató leképezés mátrixa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A\mathbf{i} & A\mathbf{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$



- A koordinátatengelyek körüli α szöggel való forgatás mátrixa:
- z-tengely körüli forgatásnál **i** és **j** vektorok fordulnak

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- x- és az y-tengely körüli forgatás mátrixai:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\0 & 1 & 0\\-\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

- a síkot α szöggel elforgató mátrix invertálható, mert determinánsa 1,
- inverze geometriai és algebrai okoskodással is felírható:

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha)\\\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\-\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

Merőleges vetítés

T A sík vagy a tér vektorait egy $\mathbf{b}$ irányvektorú egyenesre merőlegesen vetítő leképezés mátrixa

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{b}}\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathsf{T}}, \text{ speciálisan } \mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{T}}, \text{ ha } \mathbf{e} \text{ egységvektor.}$$

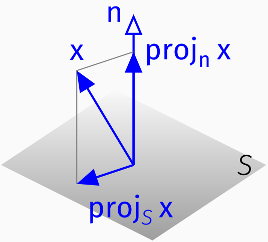
B $\mathbf{x}$-nek a $\mathbf{e}$ egységvektor egyenesére eső merőleges vetülete

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{e}(\mathbf{e}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}) = (\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{T}})\mathbf{x} \rightsquigarrow \mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{T}}.$$

Ha $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{e} = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ jelölés mellett $\mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{T}} = \mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathsf{T}}/|\mathbf{b}|^2$.

T A tér vektorait az $\mathbf{n}$ egységnyi normálvektorú síkra merőlegesen vetítő leképezés mátrixa

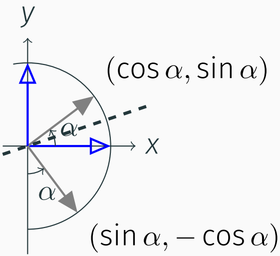
$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}.$$



Tükrözés

T A sík vektorait az x-tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre tükröző lineáris leképezés mátrixa

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$



T A tér vektorait az $\mathbf{n}$ egységnyi normálvektorú síkra tükröző leképezés mátrixa

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}.$$

Vetítés hipersíkra és egyenesre $\mathbb{R}^n$-ben

m A tér síkra és egyenesre vonatkozó vetítő és tükröző mátrixai változtatás nélkül átvihetők $\mathbb{R}^n$ hipersíkra és egyenesre vonatkozó transzformációira.

P Írjuk fel az $\mathbb{R}^4$-beli $\mathbf{v} = (1, 0, 2, -2)$ vektorra való merőleges vetítés $\mathbf{P}$ mátrixát!

M $$\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^\mathsf{T} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

P Írjuk fel az $\mathbb{R}^4$-beli $x + 2z - 2w = 0$ egyenletű hipersíkra való merőleges vetítés $\mathbf{P}'$ mátrixát! (e sík normálvektora $\mathbf{v}$!)

M $$\mathbf{P}' = \mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^\mathsf{T} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Tükrözés hipersíkra és egyenesre $\mathbb{R}^n$-ben

P Írjuk fel az $\mathbb{R}^4$-beli $\mathbf{v} = (1, 0, 2, -2)$ vektorra való tükrözés $\mathbf{T}$ mátrixát, és számítsuk ki a $\mathbf{w} = (1, 1, 1, 1)$ vektor tükörképét!

M Az $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{v}$ egyenesére merőleges összetevője $(\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{x}$, ennek 2-szeresét kell kivonni $\mathbf{x}$-ből, így a tükörkép mátrixa

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} - 2(\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^T) = \frac{2}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^T - \mathbf{I} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -7 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -8 \\ -4 & 0 & -8 & -1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{T}(1, 1, 1, 1) = \frac{1}{9}(-7, -9, -5, -13)$

P Írjuk fel az $x + 2z - 2w = 0$ egyenletű hipersíkra való tükrözés $\mathbf{T}'$ mátrixát, és számítsuk ki a $\mathbf{w} = (1, 1, 1, 1)$ vektor tükörképét!

M $$\mathbf{T}' = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 8 \\ 4 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}'\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Vetítés

P Határozzuk meg annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely a tér összes pontját az $(1, -2, 1)$ vektorral párhuzamos irányban az $x + y + 2z = 0$ egyenletű síkra vetíti.

M A vetítés $\mathbf{P}$ mátrixára

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Egyetlen mátrixszorzásba foglalva:

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\1 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \text{ ahonnan } \mathbf{P} = \begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\2 & 3 & 4\\-1 & -1 & -1\end{bmatrix}.$$

Vetítés

P Határozzuk meg annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely a tér összes pontját az $(1,-2,1)$ vektorra vetíti az $x+y+2z=0$ egyenletű síkkal párhuzamosan.

M A vetítés $\mathbf{P}$ mátrixára

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

Egyetlen mátrixszorzásba foglalva:

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}-1&-2&1\\1&0&-2\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-2\\0&0&1\end{bmatrix},\ \text{ahonnan } \mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&1&2\\-2&-2&-4\\1&1&2\end{bmatrix}.$$

Eltolás homogén koordinákat használva

- Az eltolás nem lineáris leképezés, de...
- Sík eltolása beágyazva a térbe: a $z = 1$ egyenletű síkot toljuk el:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ez még mindig nem lineáris, de mivel $z = 1$, ezért a

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + az \\ y + bz \\ z \end{bmatrix}$$

leképezés már az, mátrixa

$$\mathbf{T} = T \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Merőleges vetítés, legjobb közelítés

D Egy $\mathcal{W}$ altér esetén $\mathcal{W}^\perp$ jelölte a $\mathcal{W}$-re merőleges vektorok alterét.

T Legyen $\mathcal{W}$ az n-dimenziós valós vagy komplex $\mathcal{U}$ vektortér egy altere. Ekkor

1. $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{\mathbf{0}\}$,
2. $\mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp = \mathcal{U}$,
3. $\mathcal{U}$ minden vektora egyértelműen előáll egy $\mathcal{W}$- és egy $\mathcal{W}^\perp$-beli vektor összegeként,
4. $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$.

Merőleges vetítés $\mathbb{R}^n$ egy alterére

D Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektornak a $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ altérre eső merőleges vetülete a $\mathbf{w}$ vektor, ha $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, és $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ merőleges a $\mathcal{W}$ altérre, azaz $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathcal{W}^\perp$. A $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ vektort a $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{W}$ altérre merőleges összetevőjének nevezzük.

T Altérre való vetítés mátrixa: Ha $\mathcal{W}$ az $\mathbb{R}^n$ egy altere, és az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai a $\mathcal{W}$ egy bázisát alkotják (tehát $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú), akkor a $\mathcal{W}$ altérre való merőleges vetítés, azaz a $\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}$ leképezés mátrixa $\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}.}$

B L! $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{w} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{v}$.

$\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{W} \rightsquigarrow \exists \mathbf{x}\colon\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{w}$

$\mathcal{W}^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) \rightsquigarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$

$\rightsquigarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$.

$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ invertálható, azaz $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$

$\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$.

Példa

P Határozzuk meg a $(-2,1,3)$ vektornak az $(1,0,1)$ és a $(-1,2,0)$ vektorok által kifeszített síkra eső merőleges vetületét!

M Az altér bázisvektoraiból képzett mátrix

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ amiből } \mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Így a $(-2,1,3)$ vektor merőleges vetülete

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Merőleges vetítés mátrixai

T Egy $\mathbf{P}$ mátrix pontosan akkor merőleges vetítés mátrixa, ha $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}^2$.

B $(\Longrightarrow)$ Tfh $\mathbf{P}$ egy P merőleges vetítés mátrixa $\mathbb{R}^n$ standard bázisában. Legyenek $\mathbf{A}$ oszlopai az $\operatorname{Im}(P) = \mathcal{O}(\mathbf{P})$ egy tetszőleges bázisának vektorai.
Ekkor $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

$$\mathbf{P}^2 = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{P},$$

$$\mathbf{P}^\mathsf{T} = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = \mathbf{A}\left((\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\right)^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{P}.$$

$(\Longleftarrow)$ Tfh $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}^2$. (Biz: $\mathbf{P}$ az $\mathcal{O}(\mathbf{P})$-re merőlegesen vetít)
Elég megmutatni, hogy $\forall \mathbf{x}:\ \mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \perp \mathcal{O}(\mathbf{P})$
$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \rightsquigarrow \mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}^2\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P})$
de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T} \rightsquigarrow \mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P}^\mathsf{T}) \rightsquigarrow \mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \perp \mathcal{O}(\mathbf{P})$.

Példa

P Igazoljuk, hogy az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixok merőleges vetítés mátrixai! Hány dimenziós térre vetítenek?

Altértől való távolság

D $\mathbf{x}$-nek a $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$ altértől való távolságán a $\mathcal{W}$ altér $\mathbf{x}$-hez legközelebbi $\mathbf{w}$ vektorának tőle való távolságát értjük. E vektort az $\mathbf{x}$ vektor $\mathcal{W}$-beli legjobb közelítésének nevezzük.

T Legjobb közelítés tétele Adva van $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$. Az $\mathbf{x}$ vektornak egyetlen $\mathcal{W}$-beli legjobb $\hat{\mathbf{x}}$ közelítése van, nevezetesen $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x}$.

B L! $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$: $\mathbf{x} - \mathbf{w} = (\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x}) + (\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x} - \mathbf{w})$.
$\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x} \in \mathcal{W}^{\perp}$, $\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x} - \mathbf{w} \in \mathcal{W}$
alkalmazható rájuk Pithagorász tétele:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x}|^2 + |\,\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x} - \mathbf{w}|^2.$$

\- Így $|\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 \geq |\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x}|^2$, és egyenlőség csak akkor állhat fönn, ha $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x}$, ami egyúttal a legjobb közelítés egyértelműségét is bizonyítja.

Vektor felbontása merőleges összetevőkre

T $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$. Az x vektor egyértelműen felbomlik egy $\mathcal{W}$-beli w és egy $\mathcal{W}$-re merőleges $\mathsf{w}^\perp$ vektor összegére, nevezetesen $\mathsf{w} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathsf{x}$ és $\mathsf{w}^\perp = \mathsf{x} - \mathsf{w}$.

B Tfh létezik két felbontás: $\mathsf{x} = \mathsf{w} + \mathsf{w}^\perp = \mathsf{v} + \mathsf{v}^\perp$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\mathsf{v} - \mathsf{w}}_{\in \mathcal{W}} = \underbrace{\mathsf{w}^\perp - \mathsf{v}^\perp}_{\in \mathcal{W}^\perp}.$$

$$\rightsquigarrow \mathsf{v} - \mathsf{w} = 0 \rightsquigarrow \mathsf{v} = \mathsf{w}$$

Példa

P L! $\mathcal{W} = \operatorname{span}((1,-1,1,0),(0,1,-1,0)) \leqslant \mathbb{R}^4$, $\mathbf{x} = (8,4,2,1)$.
Bontsuk fel az $\mathbf{x}$ vektort $\mathcal{W}$-be eső és $\mathcal{W}$-re merőleges vektorok összegére.

M A $\mathcal{W}$-re való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{W}(\mathbf{W}^\mathsf{T}\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^\mathsf{T}$, ahol $\mathbf{W}$ két oszlopa a megadott két bázisvektor, tehát

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{amiből} \quad \mathbf{Px} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

\- Így $\operatorname{\mathbf{proj}}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} = \mathbf{Px} = (8,1,-1,0)$ és $\mathbf{x} - \operatorname{\mathbf{proj}}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} = (0,3,3,1)$.
Egyszerű számítással ellenőrizhető, hogy a $(8,1,-1,0) \in \mathcal{W}$ és hogy $(0,3,3,1) \in \mathcal{W}^\perp$, azaz $(0,3,3,1) \perp \mathcal{W}$, azaz merőleges a $\mathcal{W}$-t kifeszítő bázisvektorok mindegyikére.

A vetület gyorsabb kiszámítása a vetítő mátrix nélkül

- $\mathsf{W}^{\mathsf{T}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$,
- $\mathsf{W}^{\mathsf{T}}\mathsf{W} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$,
- $(\mathsf{W}^{\mathsf{T}}\mathsf{W})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$
- $(\mathsf{W}^{\mathsf{T}}\mathsf{W})^{-1}\mathsf{W}^{\mathsf{T}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$
- $\mathsf{W}(\mathsf{W}^{\mathsf{T}}\mathsf{W})^{-1}\mathsf{W}^{\mathsf{T}}\mathbf{b} = \mathsf{W}\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

A véges test esete: Páratlanváros

- Páratlanváros ügyeit hatékonyan intézi:
  1. minden bizottság páratlan sok tagból áll,
  2. bármely két bizottságnak csak páros sok közös tagja lehet.

Á Ha a lakók száma v, legföljebb v bizottságot tudnak létrehozni.

B Lakók: $\{1, 2, \ldots, v\}$, bizottságok: $\{B_1, \ldots, B_b\}$, és legyen

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \in B_j, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases} \qquad \mathbf{M} = [m_{ij}]_{v \times b}.$$

- a $b \times b$-es $\mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{M}$-ben $[\mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{M}]_{ij}$ eleme $B_i \cap B_j$ halmaz elemszámát adja, ami $i = j$ esetén páratlan, $i \neq j$ esetén páros.
- $\mathbb{F}_2$ fölött tekintjük: $\mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{M} = \mathbf{I}_b$
- $\rightsquigarrow \mathrm{r}(\mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{M}) = b \rightsquigarrow \mathrm{r}(\mathbf{M}) \geqslant b$
- $\mathbf{M} \in \mathbb{F}_2^{v \times b} \rightsquigarrow \mathrm{r}(\mathbf{M}) = b$, $\mathrm{r}(\mathbf{M}) \leqslant v$
- $\rightsquigarrow b \leqslant v$ (= pl. egyfős bizottságok esetén).

A véges test esete: Párosváros

Párosváros ügyeit megfontoltan intézi:

1. minden bizottság páros sok tagból áll,
2. bármely két bizottságnak csak páros sok közös tagja lehet.

Á Ha a lakók száma v, legföljebb $2^{\lfloor v/2 \rfloor} - 1$ bizottságot tudnak létrehozni.

B $\mathbb{F}_2$ fölött: $\mathbf{M}^\top \mathbf{M} = \mathbf{O}$, azaz $\mathbf{M}$ minden oszlopvektora merőleges mindegyik másikra

- $\mathcal{W} = \operatorname{span}(\mathbf{M}_{*1}, \mathbf{M}_{*2}, \ldots, \mathbf{M}_{*b}\}$, így bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{W}$-re:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1 \mathbf{M}_{*1} + \ldots + x_b \mathbf{M}_{*b}) \cdot (y_1 \mathbf{M}_{*1} + \ldots + y_b \mathbf{M}_{*b}) = \sum_{i,j} x_i y_j \mathbf{M}_{*i} \mathbf{M}_{*j} = 0.$$

- $\rightsquigarrow \mathcal{W} \leqslant \mathcal{W}^\perp$, de $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = \dim \mathbb{F}_2^v = v \rightsquigarrow \dim \mathcal{W} \leqslant v/2$
- $\mathcal{W}$ elemszáma legföljebb $2^{\lfloor v/2 \rfloor} - 1$ (üres részhalmaz kizárva).
- A korlát el is érhető $\lfloor v/2 \rfloor$ házaspárral.

Optimális megoldás

Inkonzisztens egyenletrendszerek

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pontosan akkor konzisztens, ha $\mathbf{b} \in \mathcal{O}(\mathbf{A})$. Inkonzisztens esetben mit tehetünk?

D Keressünk olyan $\mathbf{x}$ megoldást, melyre $\mathbf{Ax}$ a legközelebb van $\mathbf{b}$-hez (azaz $(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})^2$ a legkisebb).

- E megoldásokat az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer *optimális megoldásainak* vagy a *legkisebb négyzetek elve szerinti megoldásainak* nevezzük.
- L! $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b}$, és az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer helyett oldjuk meg az $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$ egyenletrendszert!

T Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az $\boxed{\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}}$ egyenletrendszer megoldásaival. Ezek közül egyetlen egy esik az $\mathbf{A}$ mátrix sorterébe, a legkisebb abszolút értékű.

- Neve: normálegyenlet-rendszer vagy normálegyenlet.

B $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ opt. megoldásai = $\mathbf{A\hat{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b}$ megoldásai

- ($\hat{\mathbf{x}}$ opt.mo. $\Rightarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$) $\quad \mathbf{b} - \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b} \perp \mathcal{O}(\mathbf{A}) \rightsquigarrow$
  $\mathbf{b} - \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) \rightsquigarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{b} - \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b}) = \mathbf{0}$.
  $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b} \rightsquigarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \rightsquigarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$.
- ($\hat{\mathbf{x}}$: $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ opt.mo.)
  $\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) \rightsquigarrow \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \perp \mathcal{O}(\mathbf{A})$
  $\mathbf{b} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})$ – felbontás két merőleges vektor összegére
  a $\perp$ vetület definíciója szerint $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b}$, ($\hat{\mathbf{x}}$ opt.mo.)
- $\mathcal{S}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{A})$, mert $\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, azaz $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})$
  ugyanis $\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})$
  másrészt $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \rightsquigarrow 0 = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = (\mathbf{Ax})^\mathsf{T}(\mathbf{Ax}) \rightsquigarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \rightsquigarrow$
  $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \supseteq \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})$, tehát $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})$.
- Egyetlen egy mo. van $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sorterében, így $\mathbf{A}$ sorterében is!

K Minden valós mátrixra $r(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$. (ui. $\mathcal{S}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{A})$)

K Ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek egyetlen optimális megoldása van. (ui. $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ invertálható)

Példa: egyenletrendszer optimális megoldásai

P Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 2 \\ x \phantom{{}+y} + z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert optimális megoldásait, és a min. absz. értékűt!

m Az egyenletrendszer inkonzisztens:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

M A normálegyenlet: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}.$

Példa folytatása: a minimális abszolút értékű

- Az összes megoldás:
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{így} \quad \hat{\mathsf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$
- A minimális abszolút értékű = sortérbe eső megoldás: az eredeti egyenletrendszer kiegészítésével:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
- A sortérbe eső megoldás $(0, 1, 1)$, azaz az összes megoldás ezzel fölírva:
$$\hat{\mathsf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Lineáris regresszió

- $y = a + bx$ változóira méréseket végzünk, hogy meghatározzuk a és b értékét.
- n mérés után $\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.
- normálegyenlet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- kifejtve $\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$
- Az $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenest regressziós egyenesnek nevezzük, mely a megadott adatokra a legkisebb négyzetek elve szerinti

T Az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \dots n)$ párokhoz tartozó, $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenletű regressziós egyenes paraméterei kielégítik az

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

egyenletet. Ez egyértelműen megoldható, ha van legalább két különböző x_i érték.

B még bizonyítandó az egyértelműség: ha van két különböző x_i érték, akkor az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$$

mátrix teljes oszloprangú, így $r(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = 2$, és a normálegyenlet egyértelműen egyértelműen megoldható.

Polinomiális regresszió

- Keressünk az $a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ polinom együtthatóira optimális becslést a legkisebb négyzetek módszerével, ha az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots n)$ párok sorozatát ismerjük.
- Keresendő az n egyenletből álló $k+1$-ismeretlenes

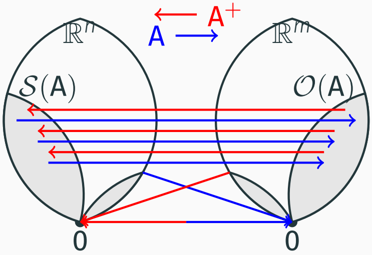
$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_k x_1^k &= y_1 \\
a_0 + a_1 x_2 + \ldots + a_k x_2^k &= y_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots &\quad \vdots \\
a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_k x_n^k &= y_n
\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása az a_0, a_1,..., a_k ismeretlenekre.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^k \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$, opt.mo. az $\mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ -ből.

Pszeudoinverz

Pszeudoinverz – általánosított inverz



- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sortérbe eső optimális megoldása megkapható egy $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ képlettel?
- $\mathbf{Ax} = \hat{\mathbf{b}}(= \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathsf{A})}\,\mathbf{b})$ egyenlet mindig megoldható, sortérbe eső $\hat{\mathbf{x}}$ megoldására $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{A}^+\hat{\mathbf{b}}$ kéne!
  $\rightsquigarrow \mathbf{A}^+(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) \Rightarrow \mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$.
- Az inverz fogalmának sokféle általánosítása van.

D **A Moore – Penrose-féle pszeudoinverz**

Legyen $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es valós mátrix. *Pszeudoinverzén* vagy *Moore – Penrose-féle pszeudoinverzén* azt az $\mathbf{A}^+$-szal jelölt mátrixot értjük, amellyel

1. $\mathbf{A}^+$ hatása $\mathcal{O}(\mathbf{A})$-n: a sortér minden $\mathbf{x}$ vektorára $\mathbf{A}^+(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$,
2. $\mathbf{A}^+$ hatása $\mathcal{O}(\mathbf{A})^\perp$-én: minden $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ vektorra $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

- $m \times n$-es mátrix pszeudoinverze $n \times m$-es
- $\mathbf{A}^+$-hoz tartozó mátrixleképezés hatását ismerjük az $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ altéren és merőleges kiegészítő alterén, ezeken definíció alapján lineáris $\rightsquigarrow$ az egész térre kiterjeszthető lineárisan $\rightsquigarrow$ létezik és egyértelmű!
- $\mathcal{N}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, és $\mathcal{S}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^+)^\perp$, így $\mathcal{S}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{S}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$.

Néhány pszeudoinverz

- $\mathsf{A}^+ = \mathsf{A}^{-1}$, ha A invertálható,
- $\mathsf{O}^+_{m\times n} = \mathsf{O}_{n\times m}$,
- $[a]^+ = [1/a]$, ha $a \neq 0$, és $[0]^+ = [0]$,
- $(\mathsf{A}^+)^+ = \mathsf{A}$,
- ha $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, akkor

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathsf{O} \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{\mathsf{O}} & \mathsf{O} \end{array}\right]^+_{m\times n} = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathsf{O} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{rr}} & \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{\mathsf{O}} & \mathsf{O} \end{array}\right]_{n\times m}$$

T

A pszeudoinverz mátrixa

Ha a valós $\mathbf{A}$ *mátrix teljes oszloprangú, akkor*

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top, \tag{1}$$

ha teljes sorrangú, akkor

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^{-1}. \tag{2}$$

Ha $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$*, ahol* $\mathbf{B}$ *egy teljes oszloprangú,* $\mathbf{C}$ *egy teljes sorrangú mátrix, akkor*

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^+\mathbf{B}^+ = \mathbf{C}^\top(\mathbf{C}\mathbf{C}^\top)^{-1}(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\top \tag{3}$$

$$= \mathbf{C}^\top(\mathbf{B}^\top\mathbf{A}\mathbf{C}^\top)^{-1}\mathbf{B}^\top. \tag{4}$$

Bizonyítás

- $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú $\rightsquigarrow$ értelmezési tartomány = sortér

  $$(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

  $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{z} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$, mert $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{z} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{A}$ teljes sorrangú $\rightsquigarrow$ oszloptér = egész tér $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ konzisztens $\hat{\mathbf{x}}$ az egyetlen sortérbe eső megoldás, akkor minden más $\mathbf{x}$ megoldás esetén $\mathbf{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})}\,\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} \rightsquigarrow \mathbf{A}^+\mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}}$, ugyanis

  $$\mathbf{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\right)(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}^+\mathbf{y}.$$
- $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$, $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ és $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{w}$

  $\mathbf{B}$ teljes oszloprangú, $\mathbf{C}$ teljes sorrangú $\rightsquigarrow$ $\mathbf{C}^+\mathbf{B}^+\mathbf{y} = \mathbf{C}^+\mathbf{w} = \mathbf{x}$ *a)* ✓

  $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ oszloptere azonos $\rightsquigarrow$ $\mathbf{B}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{C}^+\mathbf{B}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *b)* ✓

Példák

- Számítsuk ki a következő mátrixok pszeudoinverzét!

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ \text{és} \ \mathsf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- B teljes oszloprangú, használjuk az (1) képletet

$$\mathsf{B}^+ = (\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B})^{-1}\mathsf{B}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

- A C mátrix teljes sorrangú, így a (2) képlet szerint

$$\mathsf{C}^+ = \mathsf{C}^\mathsf{T}(\mathsf{C}\mathsf{C}^\mathsf{T})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

- M bázisfelbontása BC:

$$\mathsf{M}^+ = \mathsf{C}^+\mathsf{B}^+ = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- A (4) képlettel

$$\begin{aligned} \mathsf{M}^+ &= \mathsf{C}^\mathsf{T}(\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{M}\mathsf{C}^\mathsf{T})^{-1}\mathsf{B}^\mathsf{T} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

T **Moore – Penrose-tétel**

A valós $\mathbf{A}$ *mátrixnak* $\mathbf{X}$ *pontosan akkor pszeudoinverze, ha az alábbi négy feltétel mindegyike fennáll:*

a) $\mathbf{AXA} = \mathbf{A}$, *b)* $\mathbf{XAX} = \mathbf{X}$, *c)* $(\mathbf{AX})^\top = \mathbf{AX}$, *d)* $(\mathbf{XA})^\top = \mathbf{XA}$.

\- ($\mathbf{A}^+$ teljesíti e feltételeket)

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} &= \mathbf{A}\mathbf{R}^\top(\mathbf{R}\mathbf{R}^\top)^{-1}(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{A}\\
&= \mathbf{B}\mathbf{R}\mathbf{R}^\top(\mathbf{R}\mathbf{R}^\top)^{-1}(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{B}\mathbf{R} = \mathbf{B}\mathbf{R} = \mathbf{A}\\
\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ &= \mathbf{R}^\top(\mathbf{R}\mathbf{R}^\top)^{-1}(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{B}\mathbf{R}\mathbf{R}^\top(\mathbf{R}\mathbf{R}^\top)^{-1}(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\top\\
&= \mathbf{R}^\top(\mathbf{R}\mathbf{R}^\top)^{-1}(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\top = \mathbf{A}^+
\end{aligned}$$

- $A^+A = (R^\top(RR^\top)^{-1}(B^\top B)^{-1}B^\top)(BR) = R^\top(RR^\top)^{-1}R,$

  $AA^+ = (BR)(R^\top(RR^\top)^{-1}(B^\top B)^{-1}B^\top) = B(B^\top B)^{-1}B^\top.$
- $(A^+A)^\top = (R^\top(RR^\top)^{-1}R)^\top = R^\top(RR^\top)^{-1}R = A^+A$

  $(AA^+)^\top = (B(B^\top B)^{-1}B^\top)^\top = B(B^\top B)^{-1}B^\top = AA^+.$

- (Egyértelműség) Tfh X és Y is teljesíti a 4 feltételt:

$$\begin{aligned}
AY &\overset{a)}{=} AXAY \overset{c)}{=} (AX)^\top(AY)^\top = X^\top A^\top Y^\top A^\top \\
&= X^\top(AYA)^\top \overset{a)}{=} X^\top A^\top = (AX)^\top \overset{c)}{=} AX \qquad (5) \\
YA &\overset{a)}{=} YAXA \overset{d)}{=} (YA)^\top(XA)^\top = A^\top Y^\top A^\top X^\top \\
&= (AYA)^\top X^\top \overset{a)}{=} A^\top X^\top = (XA)^\top \overset{d)}{=} XA \qquad (6) \\
Y &\overset{b)}{=} YAY \overset{(5)}{=} YAX \overset{(6)}{=} XAX \overset{b)}{=} X.
\end{aligned}$$

T **A^+A és AA^+ merőleges vetítés**

Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *mátrix esetén*

$$A^+A = \mathbf{proj}_{\mathcal{S}(A)} \quad \textit{és} \quad AA^+ = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(A)} \,.$$

Tehát A^+A *az* $\mathbb{R}^n$ *teret merőlegesen vetíti* A *sorterére, míg* AA^+ *az* $\mathbb{R}^m$ *teret merőlegesen vetíti* A *oszlopterére.*

- Az előzőekben bizonyítottuk, hogy $A^+A = R^T(RR^T)^{-1}R$, ami épp az R^T oszlopvektorai által kifeszített térre – azaz a sortérre – való merőleges vetítés mátrixa.
- Az előzőekben bizonyítottuk, hogy $AA^+ = B(B^TB)^{-1}B^T$, ami a B oszlopvektorai által kifeszített térre – azaz az oszloptérre – való merőleges vetítés mátrixa.

A minimális abszolút értékű optimális megoldás

T **Optimális megoldás pszeudoinverzzel**

Legyen $\mathbf{A}$ *egy valós mátrix. Az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszernek az* $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ *a minimális abszolút értékű optimális megoldása.*

- ($\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ optimális megoldás), azaz megoldása az $\mathbf{A}^\top\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\top\mathbf{b}$ normálegyenlet-rendszernek
- Igazolni kell, hogy $\mathbf{A}^\top\mathbf{AA}^+\mathbf{b} = \mathbf{A}^\top\mathbf{b}$.
- Elég ezt: $\mathbf{A}^\top\mathbf{AA}^+ = \mathbf{A}^\top$
- $\mathbf{A} = \mathbf{BR}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\top\mathbf{AA}^+ &= (\mathbf{R}^\top\mathbf{B}^\top)(\mathbf{B}(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\top)\\ &= \mathbf{R}^\top(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\top = \mathbf{R}^\top\mathbf{B}^\top = \mathbf{A}^\top\end{aligned}$$

- $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ a sortérben van, és a sortérbe csak egyetlen optimális megoldás esik

P Adjuk meg az

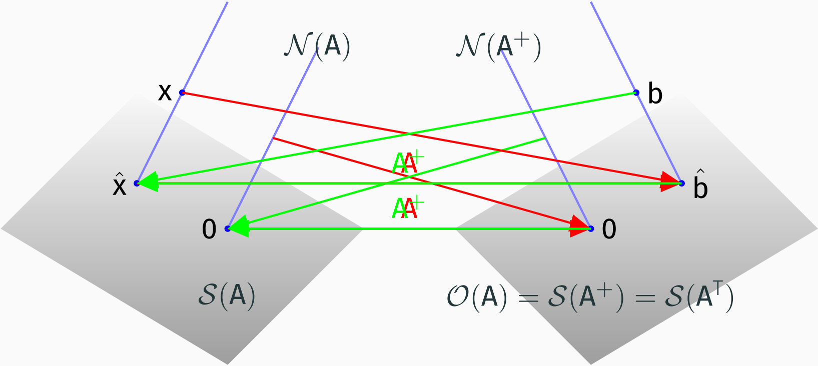
$$
\begin{aligned}
y + z &= 3 \\
x + y + 2z &= 2 \\
x + z &= 2
\end{aligned}
$$

egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldását!

M Az egyenletrendszer inkonzisztens, ami bővített mátrixának redukált lépcsős alakjából leolvasható.

A minimális abszolút értékű optimális megoldás

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$


$\mathcal{N}(\mathsf{A})$
$\mathcal{N}(\mathsf{A}^+)$
x
b
$\hat{x}$
$\hat{b}$
A
A^+
A
A^+
0
0
$\mathcal{S}(\mathsf{A})$
$\mathcal{O}(\mathsf{A}) = \mathcal{S}(\mathsf{A}^+) = \mathcal{S}(\mathsf{A}^\top)$