BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Bevezetés az algebrába 1

BMETE92AX23

Determinánsok

H406 – 2016-11-18

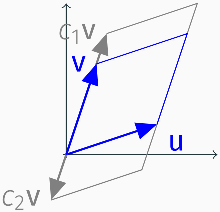
Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

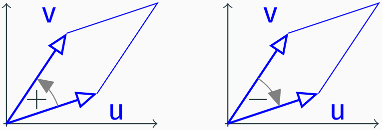
Motiváció

Parallelogramma előjeles területe

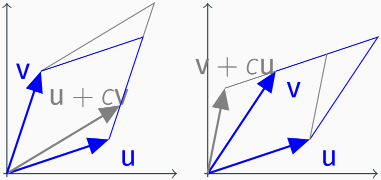
Á $f(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, és $f(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$



Á $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$



Á $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + c\mathbf{v}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + c\mathbf{u})$



A determináns mint sorvektorainak függvénye

Definíció

D *Determináns* az a valós négyzetes mátrixokon értelmezett és det-tel jelölt skalár értékű függvény, amely

- *D1* értéke c-szeresére változik, ha egy sorát c-vel szorozzuk,
- *D2* értéke -1-szeresére változik, ha két különböző sorát fölcseréljük,
- *D3* értéke nem változik a hozzáadás elemi sorművelete közben,
- *D4* az egységmátrixhoz 1-et rendel.

m *D2* elhagyható

m (sor)vektorok függvényeként is definiálható:

$$\det(\mathbf{I}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).$$

A determináns létezése

- A definícióból nem látszik, hogy az így definiált függvény létezik-e. Ezt később bizonyítjuk.
- Gauss-módszerrel számolható, ami tetszőleges test fölötti determinánsokra is alkalmazható lesz.
- A determináns egységelemes kommutatív nullosztómentes gyűrű (integritási tartomány) fölött is definiálható.

Á Egységelemes kommutatív nullosztóments R gyűrű fölött a fenti D1–D4 feltételeket kielégítő függvény létezik és egyértelmű.
(Később bizonyítjuk)

Zérus determináns

Á Ha egy mátrixnak van egy zérussora, akkor determinánsa 0.

B szorozzuk egy sorát $c \neq 0$-val

Á Ha egy mátrixnak van két azonos sora, akkor determinánsa 0.

T Ekvivalens állítások:

1. $\det(\mathbf{A}) = 0$,
2. $\mathbf{A}$ sorvektorai lineárisan összefüggők,
3. $\mathbf{A}$ szinguláris,
4. a homogén lineáris $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása.

B ha egy vektora kifejezhető a többi lin kombjaként, akkor 0-sorba vihető

P $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Egyenletrendszerek és determináns

T **Determináns nem 0 volta és az egyenletrendszerek**

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *($\mathbb{F}$ test). Ekvivalens állítások:*

- $\det \mathbf{A} \neq 0$,
- *az* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *egyrsz.* $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$*-re egyértelműen megoldható,*
- *az* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *egyrsz.-nek csak triviális megoldása van.*

- A közelítéssel óvatosan:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} = 1, \quad \text{és az} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2^n}$$

- A véletlen valós mátrixok determinánsa 1 valószínűséggel nem 0, ha a mátrix elemeit valamely folytonos valószínűségeloszlás szerint választjuk.

A determináns értékének kiszámítása

T Az alsó vagy felső háromszögmátrix, s így a diagonális mátrix determinánsa megegyezik a főátlóbeli elemek szorzatával.

K det kiszámítása: elemi sorműveletekkel hozzuk a determinánst olyan alakra, melynek vagy van egy zérussora, vagy háromszög alakú.

K Ha létezik determinánsfüggvény, akkor az egyértelmű.

B hisz az előbb kiszámolt értéket veszi fel

P Pascal-háromszög:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Elemi mátrixok determinánsa

- a hozzáadás sorművelettel kapott elemi mátrix determinánsa 1,
- a sorcserével kapotté -1,
- egy sor c-vel való szorzásával kapotté c,
- például:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Permutációk

- D Permutáció: egy véges halmazt bijektív módon önmagára képező függvény.
- Á Ha σ és τ az X halmaz permutációi, akkor kompozíciójuk is permutációja X-nek.
- D ezt a σ és τ permutációk szorzatának hívunk: $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$.
- D Az $x_1 \mapsto x_2 \mapsto \cdots \mapsto x_k \mapsto x_1$ permutációt ciklusnak nevezzük.

Permutációk megadási módjai

- Legyen σ egy permutáció
- Kétsoros jelölés:
  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \ldots$ Általánosan:
  $\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \sigma(x_1) & \sigma(x_2) & \cdots & \sigma(x_n) \end{pmatrix}.$
- Egysoros jelölés: ha az elemek eredeti sorrendje adva van, pl. 24513. Általában: $\sigma(x_1)\,\sigma(x_2) \cdots \sigma(x_n)$.
- Ciklusfelbontással: (T: minden permutáció felírható páronként diszjunkt ciklusok szorzataként.) Pl. $(124)(35)$

Inverziók

D egy permutáló mátrix két sora *inverzióban* áll, ha az előbb álló sorbeli 1-es hátrébb van, mint a másik sorbeli

P $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ inverzióinak száma például 4.

D Legyen σ az $X = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy permutációja. Azt mondjuk, hogy az $i, j \in X$ elemek inverzióban állnak, ha $i < j$, de $\sigma(i) > \sigma(j)$.

P A 3241 permutációban 4 inverzió van.

D Egy permutációt párosnak (páratlannak) nevezünk, ha inverzióinak száma páros (páratlan).

Permutáló mátrix determinánsa

T A permutáló mátrix determinánsa aszerint $+1$ vagy -1, hogy inverzióban álló sorpárjainak száma páros vagy páratlan. (Ez megegyezik annak a permutációnak a paritásával, mely az 1-es elemek első indexeit a másodikba viszi.)

B Elég megmutatni, hogy egy sorcsere mindig megváltoztatja az inverziók számának paritását, vagyis azok száma párosból páratlanra, páratlanból párosra változik.
Így ha egy permutáló mátrix inverzióinak száma páros, akkor csak páros sok sorcserével vihető az identikus mátrixba.
Ha a két megcserélendő sor szomszédos, akkor a sorcsere pontosan eggyel változtatja az inverziók számát.
Ezután cseréljük fel az i-edik és j-edik sorokat (legyen $i < j$).
Ehhez összesen $2(j - i) - 1$ szomszédos sor cseréje szükséges, ami a paritást ellenkezőjére változtatja.

Mátrixműveletek és determináns

Á $\mathbf{A}_{n\times n}$ mátrixra és tetszőleges c skalárra $\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$

T $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$

B $\det(\mathbf{EB}) = \det(\mathbf{E})\det(\mathbf{B})$

Ha $\det \mathbf{A} = 0$, akkor $\det(\mathbf{AB})$ is 0.

Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_k$ az elemi mátrixok szorzatára bontás.

$\rightsquigarrow$ $\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2)\ldots\det(\mathbf{E}_k)\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{AB})$.

Á $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

B $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_k\mathbf{R} \rightsquigarrow |\mathbf{A}^\mathsf{T}| = |\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{E}_k^\mathsf{T} \ldots \mathbf{E}_2^\mathsf{T}\mathbf{E}_1^\mathsf{T}| = |\mathbf{R}^\mathsf{T}||\mathbf{E}_k^\mathsf{T}| \ldots |\mathbf{E}_2^\mathsf{T}||\mathbf{E}_1^\mathsf{T}|$.

Á Determináns könnyen számolható a PLU-ból.

A determináns additív minden sorban

T Additivitás az i-edik sorban: $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$

B Ha az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_{i-1}$, $\mathbf{a}_{i+1}$,...,$\mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = |\mathbf{C}| = 0$, ha $\mathbf{a}_i$ és $\mathbf{b}_i$ függ a többitől, ugyanez. Tfh $\mathbf{b}_i = b_1\mathbf{a}_1 + b_2\mathbf{a}_2 + \ldots + b_i\mathbf{a}_i + \ldots + b_n\mathbf{a}_n$. Ekkor $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + b_i|\mathbf{A}| = (1 + b_i)|\mathbf{A}| = |\mathbf{C}|$.

K A determináns minden sorában „megtartja a lineáris kombinációt”.

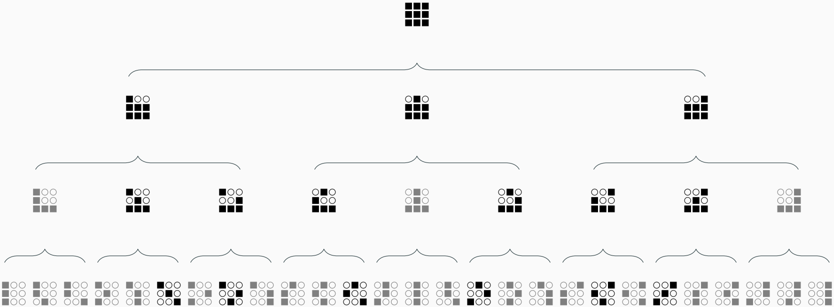
B additivitás az i-edik sorban és az ún. homogenitás (D1) miatt!

A determináns mint elemeinek függvénye

Additivitás használata

Mivel $(a,b,c) = (a,0,0) + (0,b,0) + (0,0,c)$ ezért

$$\begin{vmatrix} a+0+0 & 0+b+0 & 0+0+c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$



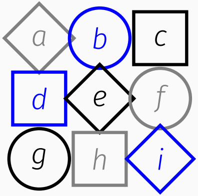
Determináns mint kígyók összege

T Minden n-edrendű determináns fölbomlik az összes belőle kiválasztható kígyó determinánsának összegére. Jelölje $d_{j_1 j_2 \dots j_n}$ annak a permutáló mátrixnak a determinánsát, mely az a_{1j_1}, a_{2j_2},..., a_{nj_n} elemekből álló kígyóhoz tartozik. Ekkor

$$\det([a_{ij}]) = \sum d_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

ahol az összegzés az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes lehetséges $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ permutációján végigfut.

P Sarrus-szabály $n = 2$, $n = 3$ esetén:



Következmények

- K Determinánsfüggvény létezése Egységelemes kommutatív nullosztómentes gyűrű fölötti determinánsfüggvény létezik, és egyértelmű.
- B A kígyók összegére bontott képletről kell bizonyítani, hogy kielégítik a D1, D3, D4 axiómákat (a D2 köv. a többiből).
- Á A determináns kiszámolásához elég csak az összeadás és szorzás művelete, az osztásra, melyet az elemi sorműveletek során használhatunk, nincs szükség.
- Á Egész számokból álló determináns értéke egész szám.
- Á Mivel a determináns kifejtésében csak az összeadás és a szorzás művelete szerepel, a determináns folytonos, sőt differenciálható függvénye elemeinek.

Determináns rendjének csökkentése

D Az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns i-edik sorának és j-edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1)$-edrendű determináns $(-1)^{i+j}$-szeresét az $|\mathbf{A}|$ determináns a_{ij} eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsának nevezzük.

+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+

Á Ha az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns a_{ij} elemének sorában vagy oszlopában minden további elem 0, A_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldetermináns, akkor

$$|\mathbf{A}| = a_{ij}A_{ij}.$$

B Legyen az $|\mathbf{A}|$ det. i-edik sorában az a_{ij}-n kívül minden elem 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ij} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij}A_{ij}.$$

P Számítsuk ki az alábbi determináns értékét! $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

M Ha tudjuk, csökkentjük a determináns rendjét:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & \boxed{8} & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-8) \cdot (-1)^{2+3} \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \boxed{6} & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-8) \cdot (-5) \cdot (-1)^{2+1} \cdot 6 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-8) \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot (-12) = 2880.$$

Kifejtési tétel

T Az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns értéke kifejezhető bármely sorának vagy oszlopának elemeivel és a hozzájuk tartozó előjeles aldeterminánsok segítségével. Az i-edik sora, illetve a j-edik oszlopa szerint kifejezve (kifejtve):

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, \text{ illetve } |\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}.$$

P $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

M Harmadik oszlop szerint érdemes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

Vandermonde-determináns

D x_1, x_2,... x_n számokhoz tartozó *Vandermonde-determináns*

$$V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

T $V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$

B $V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)V_{n-1}(x_2, \dots, x_n)$$

$$= V_{n-1}(x_2, \dots, x_n)\prod_{1<j}(x_j - x_1).$$

Cramer-szabály

J $\mathbf{A}_{i,\mathbf{b}} = [\mathbf{a}_{*1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*n}]$.

T Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\det \mathbf{A} \neq 0$, és ekkor

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}}{\det \mathbf{A}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

B $\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_{*i}$, így

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{I}_{i,\mathbf{x}} &= \mathbf{A}[\mathbf{e}_{*1} \ \dots \ \mathbf{e}_{*,i-1} \ \mathbf{x} \ \mathbf{e}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{e}_{*n}] \\
&= [\mathbf{A}\mathbf{e}_{*1} \ \dots \ \mathbf{A}\mathbf{e}_{*,i-1} \ \mathbf{A}\mathbf{x} \ \mathbf{A}\mathbf{e}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{A}\mathbf{e}_{*n}] \\
&= [\mathbf{a}_{*1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*n}] \\
&= \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}
\end{aligned}$$

Példa a Cramer-szabályra

- Oldjuk meg az

$$2x + 5y = 4$$
$$5x + 3y = 6$$

egyenletrendszert a Cramer-szabállyal!

- $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -19$, $|\mathbf{A}_{1,\mathbf{b}}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -18$, $|\mathbf{A}_{2,\mathbf{b}}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -8$.

Innen $x = \frac{-18}{-19} = \frac{18}{19}$, $y = \frac{-8}{-19} = \frac{8}{19}$.

Inverz mátrix elemei

T $[\mathbf{A}^{-1}]_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det \mathbf{A}}$.

B $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$, azon belül az $\mathbf{Ax}_{*j} = \mathbf{e}_j$ egyenletrendszer megoldásával (Cramer-szabály szerint):

$$x_{ij} = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j}}{\det \mathbf{A}}, \quad \text{ahol} \det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & 1 & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{ji},$$

$$\rightsquigarrow \quad x_{ij} = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j}}{\det \mathbf{A}}.$$

K $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} [A_{ij}]^{\mathsf{T}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{A}$.

További következmények

Á $\mathbf{A} \operatorname{adj} \mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}$ (szinguláris mátrixra is).

L Kifejtés és ferde kifejtés sorokra:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{uk} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ha } i = u, \\ 0, & \text{ha } i \neq u, \end{cases}$$

oszlopokra:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kv} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ha } j = v, \\ 0, & \text{ha } j \neq v. \end{cases}$$

B Ha az i-edik sor elemeit az u-adik sorhoz tartozó előjeles aldeterminánsokkal szorozzuk és $u \neq i$, akkor az u-adik sor elemeit nem használjuk, tehát szabadon megváltoztathatjuk: másoljuk az i-edik sort az u-adik helyébe. Ekkor $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{uk} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk} A_{uk}$, másrészt e mátrix kifejtését kaptuk, aminek van két azonos sora, tehát értéke 0.

További következmények 2

- K Az inverz mátrix minden eleme folytonos függvénye a mátrix minden elemének minden olyan helyen, ahol a determináns nem 0, azaz minden olyan helyen, ahol az inverz létezik.
- K Egy n-ismeretlenes n egyenletből álló egyenletrendszer megoldásvektorának minden koordinátája folytonos függvénye az egyenletrendszer együtthatóinak és a jobb oldalán álló vektor koordinátáinak, hisz a megoldás az inverzzel való szorzással megkapható.
- K Egészelemű mátrix inverze pontosan akkor egészelemű, ha determinánsa 1 vagy -1 $\big(\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{I} = 1\big)$.

Blokkmátrixok determinánsa

T $\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|.$

B E determinánsok kígyók determinánsainak összegére bontása megegyezik az A és D ilyen felbontásának szorzatával.

T Ha $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ azonos méretű és egymással fölcserélhető részmátrixokra particionálható és A invertálható, akkor $|M| = |AD - BC|$.

B Trükk

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

Blokkmátrixok determinánsa 2

T Legyen $\mathsf{M} = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{bmatrix}$, ahol A és D négyzetes mátrixok. Ekkor

Ha $|\mathsf{A}| \neq 0$, akkor $|\mathsf{M}| = |\mathsf{A}||\mathsf{D} - \mathsf{C}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{B}|$.

Ha $|\mathsf{D}| \neq 0$, akkor $|\mathsf{M}| = |\mathsf{A} - \mathsf{B}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{C}||\mathsf{D}|$.

B Trükk

$$\begin{aligned}
\mathsf{M} = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathsf{I} & \mathsf{O} \\ \mathsf{C}\mathsf{A}^{-1} & \mathsf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \mathsf{O} & \mathsf{D} - \mathsf{C}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{B} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathsf{A} - \mathsf{B}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{C} & \mathsf{B} \\ \mathsf{O} & \mathsf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{I} & \mathsf{O} \\ \mathsf{D}^{-1}\mathsf{C} & \mathsf{I} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Determináns és rang

T Egy $\mathsf{M}_{m\times n}$ mátrix r rangja megegyezik

- a belőle kiválasztható legnagyobb méretű nemszinguláris négyzetes mátrix rendjével,
- a belőle kiválasztható legnagyobb méretű nemnulla aldetermináns rendjével.

B Sor és oszlopműveletek közben a rang nem változik. A rang megegyezik a maximális független sorok, illetve oszlopok számával.

Válasszunk ki r független sort és oszlopot, kereszteződésükben áll az A mátrix. Sorcserékkel és oszlopcserékkel vigyük a bal felső sarokba. Tehát léteznek olyan P_1 és Q_1 permutáló mátrixok, hogy

$$\mathsf{M}' = \mathsf{P}_1\mathsf{M}\mathsf{Q}_1 = \begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{bmatrix}.$$

Determináns és rang 2

- $\mathbf{A}$ invertálható, mert $\mathbf{M}'$ első r sorára vonatkozó elemi sorműveletekkel $\mathbf{I}$-be vihető, így determinánsa nem 0.
- Léteznek olyan invertálható $m \times m$-es $\mathbf{P}_2$ és $n \times n$-es $\mathbf{Q}_2$ mátrixok, hogy

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{M}\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{M}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

- Végül, ha bármely $(r+1) \times (r+1)$-es $\mathbf{Y}$ részmátrixot tekintjük, annak oszlopai és sorai $\mathbf{M}$-ben lineárisan összefüggők, így $\mathbf{Y}$-ban is.
- A determinánsokról szóló állítás következik az előzőkből.

A kifejtési tétel általánosítása

J Legyen A négyzetes. Jelölje $\mathsf{A}_{i_1 i_2 \dots i_k, j_1 j_2 \dots j_k}$ az A mátrix $i_1, i_2, \dots, i_k$ sorainak és $j_1, j_2, \dots, j_k$ oszlopainak kereszteződésében lévő részmátrixot, $D_{i_1 i_2 \dots i_k, j_1 j_2 \dots j_k}$ az e sorok és oszlopok elhagyásával kapott mátrix determinánsát, és

$$A_{i_1 i_2 \dots i_k, j_1 j_2 \dots j_k} = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} D_{i_1 i_2 \dots i_k, j_1 j_2 \dots j_k}$$

legyen az előjeles aldetermináns.

T Az $n \times n$-es A mátrix determinánsa

$$\begin{aligned} |\mathsf{A}| &= \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n} |\mathsf{A}_{i_1 i_2 \dots i_k, j_1 j_2 \dots j_k}| A_{i_1 i_2 \dots i_k, j_1 j_2 \dots j_k} \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} |\mathsf{A}_{i_1 i_2 \dots i_k, j_1 j_2 \dots j_k}| A_{i_1 i_2 \dots i_k, j_1 j_2 \dots j_k} \end{aligned}$$