



Bevezetés az algebraba 1

BMETE92AX23



Mátrixműveletek

H406 – 2016-11-03



Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Mátrixműveletek definíciói

Mátrixműveletek definíciói

Műveletek táblázatokkal

Összeadás

- A valós számok közti műveletek természetes módon kiterjeszthetők mátrixokkal való műveletekké.
- Ezek definícióihoz az összeadás és a szorzás hétköznapi alkalmazásainak táblázatokra való kiterjesztésén keresztül fogunk eljutni.
- 3 alma meg 2 alma az 5 alma
- Azonos méretű, azonos fejlécű táblázatok összeadásának egy lehetséges módja:

	alma (db)	szőlő (fürt)	+	alma (db)	szőlő (fürt)	=	alma (db)	szőlő (fürt)	
piros	3	2		piros	2		piros	5	4
zöld	2	1		zöld	0		zöld	2	2

Szorás számmal

- Az asztalon 2 alma van. Ha számukat megháromszorozzuk, összeszorozunk egy mértékegység nélküli számot (3) egy mértékegységgel rendelkezővel (2 darab).
- Ezt megtehetjük egy kosár egész tartalmával is:

	<hr/>			<hr/>		
	alma	szőlő		alma	szőlő	
	(db)	(fürt)		(db)	(fürt)	
3 ·	<hr/>		=	<hr/>		
	piros	3	2	piros	9	6
	zöld	2	1	zöld	6	3
	<hr/>			<hr/>		

Táblázatok szorzása

- Egy adag (10 dkg) alma energiatartalma 30 kcal, 5 adag energiatartalma

$$5 \text{ adag} \cdot 30 \frac{\text{kcal}}{\text{adag}} = 150 \text{ kcal.}$$

- Gyümölcssaláták (A, B, C), gyümölcsök (alma, banán, narancs), tartalmuk (szénhidrát- és energiatartalom).
- Két táblázat: a sorokba kerülnek azok a tételek, melyek tartalmát az oszlopokban részletezzük:

	Alma (adag)	Banán (adag)	Narancs (adag)		Szénhidrát (g/adag)	Energia (kcal/adag)
A	5	1	4	Alma	7	30
B	4	4	2	Banán	24	105
C	4	2	4	Narancs	8	40

Táblázatok szorzása (folytatás)

- Az A saláta energiatartalma:

$$5 \text{ adag} \cdot 30 \frac{\text{kcal}}{\text{adag}} + 1 \text{ adag} \cdot 105 \frac{\text{kcal}}{\text{adag}} + 4 \text{ adag} \cdot 40 \frac{\text{kcal}}{\text{adag}} = 415 \text{ kcal,}$$

	Szénhidrát (g/adag)	Energia (kcal/adag)
Alma	7	30
Banán	24	105
Narancs	8	40

	Alma (adag)	Banán (adag)	Narancs (adag)		Szénhidrát (g)	Energia (kcal)
A	5	1	4	A	91	415
B	4	4	2	B	140	620
C	4	2	4	C	108	490

D Lineáris helyettesítés

Lineáris helyettesítésről beszélünk, ha változók egy halmazát más változók konstansszorosainak összegeként állítjuk elő.

- Legyen pl.

$$a = 5x + y + 4z \quad x = 7s + 30k$$

$$b = 4x + 4y + 2z \quad \text{és} \quad y = 24s + 105k$$

$$c = 4x + 2y + 4z \quad z = 8s + 40k$$

- Egy pillanatra visszalépünk (táblázatosítunk)

	x	y	z		s	k
a	5	1	4	x	7	30
b	4	4	2	y	24	105
c	4	2	4	z	8	40

Lineáris helyettesítések kompozíciója

- **kompozíció:** egymás után való elvégzés
- Az $a = 5x + y + 4z$ kifejezésben helyettesítsük x , y és z helyébe a második lineáris helyettesítés szerinti kifejezéseket

$$a = 5x + y + 4z = 5(7s + 30k) + (24s + 105k) + 4(8s + 40k) = 91s + 415k.$$

- Pl. k együtthatója: $5 \cdot 30 + 1 \cdot 105 + 4 \cdot 40 = 415$.

	s	k
x	7	30
y	24	105
z	8	40

	x	y	z		s	k
a	5	1	4	a	91	415
b	4	4	2	b	140	620
c	4	2	4	c	108	490

Mátrixműveletek definíciói

Mátrixűveletek

Mátrixok

- S fölötti $m \times n$ típusú **mátrixok tere** $S^{m \times n}$ vagy $M_{m \times n}[S]$, ahol S egy halmaz (pl. $S = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z} \dots$)
- Két mátrixot akkor tekintünk **egyenlőnek**, ha azonos típusúak, és az azonos indexű elemek egyenlők.
- Például

$$[1 \quad 2 \quad 3] \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

- négyzetes mátrix, főátló, diagonális mátrix,

$$\text{diag}(1, 2, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Elemenkénti mátrixműveletek

- $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ azonos típusúak:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}], \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = [a_{ij}] - [b_{ij}] := [a_{ij} - b_{ij}].$$

- Zérusmátrix: $\mathbf{O}_{m \times n}$, \mathbf{O}_n
- c skalárral szorzás

$$c\mathbf{A} = c[a_{ij}] := [ca_{ij}].$$



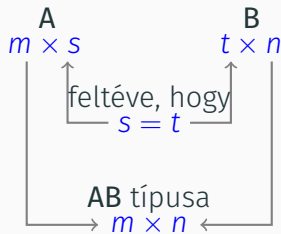
- Mátrixokra is definiálhatjuk a **lineáris kombináció**, a **lineáris függetlenség** és a **kifeszített altér** fogalmát.

Mátrixszorzás

- D Egy $m \times t$ -s **A** és egy $t \times n$ -es **B** mátrix szorzatán azt az **AB**-vel jelölt $m \times n$ -es **C** mátrixot értjük, amelynek i -edik sorában és j -edik oszlopában álló eleme

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} + \dots + a_{it}b_{tj} = \sum_{k=1}^t a_{ik}b_{kj} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{b}_{*j}$$

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{tj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}$$



Műveletek blokkmátrixokkal

- Hatalmas méretű mátrixokkal végzett műveletek párhuzamosíthatók, és a memóriakezelésük is hatékonyabbá válik, ha a mátrixokat vízszintes és függőleges vonallal részmátrixokra, ún. blokkokra osztjuk.
- Ha \mathbf{A} és \mathbf{B} azonos típusú, azonos módon particionált blokkmátrix, akkor

$$c[\mathbf{A}_{ij}] := [c\mathbf{A}_{ij}], \quad [\mathbf{A}_{ij}] + [\mathbf{B}_{ij}] := [\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}].$$

- Ha $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ik}]_{m \times t}$, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{kj}]_{t \times n}$ két blokkmátrix, és minden k -ra az \mathbf{A}_{ik} blokk oszlopainak száma megegyezik \mathbf{B}_{kj} sorainak számával, akkor a $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ szorzatra

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^t \mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{kj}.$$

Műveletek blokkmátrixokkal

P Számítsuk ki a $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{array} \right]$ mátrixot!

M

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{array} \right] \\ = & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array} + \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \left| \begin{array}{c} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{array} \right. \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{array} \right] \\ = & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 7 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \\ 9 & 3 & 7 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 6 \\ 4 & 6 \\ 9 & 7 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Mátrixműveletek definíciói

A mátrixszorzás használata

Skaláris szorzat és diadikus szorzat mátrixszorzatos alakja

- $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, ekkor

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Az $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ szorzatot a két vektor **diadikus szorzatának**, röviden **diádnak** nevezzük. E szorzat egy $m \times n$ -es mátrix:

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_m v_1 & u_m v_2 & \dots & u_m v_n \end{bmatrix}.$$

- $\mathbf{u} = (1, 0, 2), \mathbf{v} = (3, 2, 1), \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ?, \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = ?$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5, \quad \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja

- Ha \mathbf{A} jelöli egy egyenletrendszer együtthatómátrixát, illetve \mathbf{b} a konstans tagok és \mathbf{x} az ismeretlenek oszlopvektorát, azaz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

akkor az

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

egyenletrendszer $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ alakba írható.

- $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5,$ $ax = u$ $x + 2y = 1$
 $by = v$ és $y = 1$
 $cz = w$ $0 = 1$
- mátrixszorzatos alakjaik rendre:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5, \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- A szimultán egyenletrendszerek $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ alakba írhatók, pl.:

$$\begin{array}{ll} 2x_{11} + 3x_{21} = 7 & 2x_{12} + 3x_{22} = 9 \\ 3x_{11} - 4x_{21} = 2 & 3x_{12} - 4x_{22} = 5 \end{array}$$

- $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$

Lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja

- Hasonlóan az egyenletrendszer mátrixszorzatos alakjához, pl.:

$$\begin{aligned}x &= 3a + 2b + 4c \\y &= a - 3b + 2c \\z &= 2a - b + 2c\end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Á **Mátrixszorzás és lineáris kombináció**

Legyen \mathbf{A} $m \times n$ -es mátrix, \mathbf{x} n -dimenziós, \mathbf{y} m -dimenziós vektor. Ekkor az \mathbf{Ax} szorzat az \mathbf{A} oszlopvektorainak

$$\mathbf{a}_{*1}x_1 + \mathbf{a}_{*2}x_2 + \cdots + \mathbf{a}_{*n}x_n$$

lineáris kombinációját, míg az $\mathbf{y}^T\mathbf{A}$ szorzat az \mathbf{A} sorvektorainak

$$\mathbf{a}_{1*}y_1 + \mathbf{a}_{2*}y_2 + \cdots + \mathbf{a}_{m*}y_m$$

lineáris kombinációját adja.

Á **Mátrix elemeinek, sor- és oszlopvektorainak előállítás**

Legyen \mathbf{A} egy $m \times n$ -es mátrix, \mathbf{e}_i m -dimenziós, \mathbf{e}_j n -dimenziós standard egységvektor. Ekkor

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{A} = \mathbf{a}_{i*}, \quad \mathbf{A} \mathbf{e}_j = \mathbf{a}_{*j}, \quad \text{továbbá } \mathbf{e}_i^T (\mathbf{A} \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i^T \mathbf{A}) \mathbf{e}_j = a_{ij}.$$

Az $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T$ diád (i, j) -indexű eleme 1, az összes többi 0:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

A báziscsere mátrixszorzatos alakja

P **Áttérés standard bázisra:** $\mathcal{B} = \{ (1, 2, 3), (0, 2, 3), (3, 5, 8) \}$ az \mathbb{R}^3 egy bázisa. Írjuk fel $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ standard bázisbeli koordinátás alakját egyetlen mátrixszorzással. (Pl. $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (3, 2, -1)$)

M $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (3, 2, -1)$ azt jelenti, hogy

$$\mathbf{v} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \text{ azaz } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (x, y, z)$. Ekkor

$$\mathbf{v} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

A báziscsere mátrixszorzatos alakja 2

D **Áttérés mátrixa**

Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ a \mathcal{V} egy bázisa és \mathcal{C} egy \mathcal{V} -t tartalmazó vektortér egy bázisa (pl. a \mathcal{V} vektortéré). Az

$$\mathbf{T}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}]$$

mátrixot a \mathcal{B} bázisról a \mathcal{C} -re való áttérés mátrixának nevezzük.

Á **Koordináták változása a bázis cseréjénél**

Ha \mathcal{B} a \mathcal{V} vektortér bázisa, és \mathcal{C} egy \mathcal{V} -t tartalmazó tér bázisa, akkor bármely $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorra

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{T}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

B Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. A koordinátás alak jelentése szerint

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{b}_1 + v_2 \mathbf{b}_2 + \dots + v_n \mathbf{b}_n.$$

Ennek koordinátás alakja a \mathcal{C} bázisban

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} &= v_1 [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} + v_2 [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} + \dots + v_n [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \\ &= [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \mid \dots \mid [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}] [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \\ &= \mathbf{T}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

P \mathcal{E} az \mathbb{R}^4 standard bázisa, és $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0, -2), (2, 3, 3, -2)\}$.
vektorok által kifeszített altér. Írjuk fel az $\mathbf{T}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ mátrixot és
adjuk meg a $(-1, 1)_{\mathcal{B}}$ és a $(-3, 2)_{\mathcal{B}}$ vektorok \mathcal{E} -beli koordinátás
alakját!

M Az áttérés mátrixa

$$\mathbf{T}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{E}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{E}}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Így a két vektor koordinátás alakja a standard bázisban

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bázisfelbontás

Á Bázisfelbontás

Legyen A redukált lépcsős alakja a zérussorok nélkül R , az A főszlopaiból álló mátrix B . Ekkor $A = BR$.

P Írjuk fel az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ bázisfelbontását!

B Redukált lépcsős alak: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Innen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = BR$.

- D Az A mátrix **teljes sorrangú**, ha sorvektorai függetlenek, **teljes oszloprangú**, ha oszlopvektorai függetlenek.
- Ez azt jelenti, hogy egy mátrix teljes sorrangú, ha rangja megegyezik sorainak számával, illetve teljes oszloprangú, ha rangja megegyezik oszlopainak számával.
 - A bázisfelbontás egy mátrixot egy teljes oszloprangú és egy teljes sorrangú mátrix szorzatára bont!
- D Az A mátrix **teljes rangú**, ha teljes sorrangú vagy teljes oszloprangú.

Egységmátrix, elemi mátrixok

$$- \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$- \text{Az } n \times n\text{-es } I_n := \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{ mátrixot}$$

egységmátrixnak nevezzük.

- Az I_n egységmátrixon végrehajtott egyetlen elemi sorművelettel kapott mátrixot **elemi mátrixnak** nevezzük.
- Az alábbi mátrixok elemi mátrixok:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Szorás elemi mátrixszal

- Mit veszünk észre az alábbi szorzások eredményén?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 5a_{21} & 5a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{31} & a_{12} + 2a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}.$$

Elemi sorművelet mátrixszorzással

Á Legyen E az az elemi mátrix, melyet I_m -ből egy elemi sorművelettel kapunk. Ha ugyanezt a sorműveletet egy tetszőleges $m \times n$ -es A mátrixra alkalmazzuk, akkor eredményül az EA mátrixot kapjuk.

Homogén egyenletrendszer megoldása blokkmátrix alakban

P Egy homogén lin. egyenletrendszer és redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

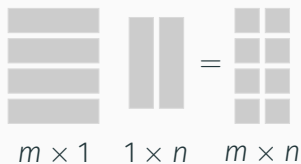
- A megoldások lineáris kombinációk, így mátrixszorzat alakba is felírhatók:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}.$$

Á Ha $\text{rref}(\mathbf{A}) = [\mathbf{I}|\mathbf{S}]$, akkor az $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ egyenletrendszer megoldása

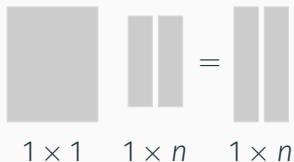
$$\begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{t}.$$

Particionálás: [sorvektorok] · [oszlopvektorok]



$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \mathbf{a}_{2*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m*} \end{bmatrix} \left[\mathbf{b}_{*1} \mid \dots \mid \mathbf{b}_{*n} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*n} \\ \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*n} \end{bmatrix}.$$

Particionálás: [mátrix] · [oszlopvektorok]



$$C = AB = A \left[\mathbf{b}_{*1} \mid \mathbf{b}_{*2} \mid \dots \mid \mathbf{b}_{*n} \right] = \left[\mathbf{Ab}_{*1} \mid \mathbf{Ab}_{*2} \mid \dots \mid \mathbf{Ab}_{*n} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} A \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} B \\ \mathbf{b}_{*j} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} C \\ \mathbf{c}_{*j} \end{array} \right]$$

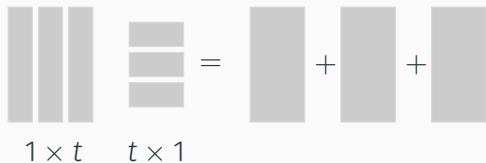
Particionálás: [sorvektorok] · [mátrix]



$$C = AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \mathbf{a}_{2*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m*} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*}B \\ \mathbf{a}_{2*}B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m*}B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ \mathbf{a}_{j*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ \mathbf{c}_{j*} \end{bmatrix}$$

Particionálás: [oszlopvektorok] · [sorvektorok], diádok összege



$$AB = \left[\mathbf{a}_{*1} \mid \dots \mid \mathbf{a}_{*t} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1*} \\ \mathbf{b}_{2*} \\ \dots \\ \mathbf{b}_{t*} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_{*1}\mathbf{b}_{1*} + \mathbf{a}_{*2}\mathbf{b}_{2*} + \dots + \mathbf{a}_{*t}\mathbf{b}_{t*}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

A szorzat oszlopai és sorai

Á Az \mathbf{AB} mátrix minden oszlopa az \mathbf{A} oszlopainak lineáris kombinációja, és minden sora a \mathbf{B} sorainak lineáris kombinációja.

B Az \mathbf{AB} mátrix j -edik oszlopa

$$(\mathbf{AB})_{*j} = \mathbf{A}\mathbf{b}_{*j} = \mathbf{a}_{*1}b_{1j} + \mathbf{a}_{*2}b_{2j} + \dots + \mathbf{a}_{*t}b_{tj}$$

az i -edik sora pedig

$$(\mathbf{AB})_{i*} = \mathbf{a}_{i*}\mathbf{B} = a_{i1}\mathbf{b}_{1*} + a_{i2}\mathbf{b}_{2*} + \dots + a_{it}\mathbf{b}_{t*},$$

Á $r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{A})$ és $r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{B})$, így

$$r(\mathbf{AB}) \leq \min(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})).$$

B Az \mathbf{AB} mátrix minden oszlopa az \mathbf{A} oszlopainak lineáris kombinációja $\rightsquigarrow \mathcal{O}(\mathbf{AB}) \leq \mathcal{O}(\mathbf{A}) \rightsquigarrow r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{A})$.

Hasonlóan az \mathbf{AB} minden sora a \mathbf{B} sorainak lineáris kombinációja $\rightsquigarrow \mathcal{S}(\mathbf{AB}) \leq \mathcal{S}(\mathbf{B}) \rightsquigarrow r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{B})$.

Á $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$

B $\mathcal{S}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \text{span}(\mathcal{S}(\mathbf{A}) \cup \mathcal{S}(\mathbf{B}))$, az utóbbinak van $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$ elemű generátorrendszere \rightsquigarrow

- $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \dim(\mathcal{S}(\mathbf{A} + \mathbf{B})) \leq \dim(\text{span}(\mathcal{S}(\mathbf{A}) \cup \mathcal{S}(\mathbf{B}))) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$

Mátrixműveletek algebrája

Mátrixműveletek algebrája

Az alaplmműveletek tulajdonságai

Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai

Legyenek a következőkben szereplő mátrixok egy egységelemes kommutatív R gyűrű fölötti mátrixok.

- $A + B = B + A$,
- $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$,
- $c(A + B) = cA + cB$, $(c + d)A = cA + dA$.

Mire vigyázzunk a mátrixszorzásnál?

- A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ nem áll fenn bármely két összeszorozható mátrixra.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ de } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, akkor az $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ feltétel kevés ahhoz, hogy a $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ következtetésre jussunk.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ de } \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Az $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ -ból nem következik, hogy \mathbf{A} vagy \mathbf{B} a nullmátrix.

D Nullosztó: egy alg. strukt. $a \neq 0$ eleme, melyhez $\exists b \neq 0$, hogy $ab = 0$. (\mathbb{R} -ben nincs, \mathbb{Z}_m -ben van, ha m nem prím.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A szorzás tulajdonságai

- Á $A(BC) = (AB)C$ csoportosíthatóság, asszociativitás
- $A(B + C) = AB + AC$ disztributivitás
- $(A + B)C = AC + BC$ disztributivitás
- $(cA)B = c(AB) = A(cB)$
- $A_{m \times n} \mathbf{0}_{n \times t} = \mathbf{0}_{m \times t}$ szorzás nullmátrixszal
- $\mathbf{I}_m A_{m \times n} = A_{m \times n} \mathbf{I}_n = A_{m \times n}$ szorzás egységmátrixszal

Az asszociativitás bizonyítása

- B** Ha az egyenlőség egyik oldalán kijelölt szorzások elvégezhetők, akkor a másik oldalon is. ($\mathbf{A}_{m \times s}$, $\mathbf{B}_{u \times v}$, $\mathbf{C}_{t \times n} \rightsquigarrow s = u, v = t$)
- Elég sorvektor alakú \mathbf{A} és oszlopvektor \mathbf{C} -re bizonyítani, ui.

$$((\mathbf{AB})\mathbf{C})_{ij} = (\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B})\mathbf{c}_{*j}, \quad (\mathbf{A}(\mathbf{BC}))_{ij} = \mathbf{a}_{i*}(\mathbf{B}\mathbf{c}_{*j}).$$

$$- \left[\sum_{k=1}^m a_k b_{k1} \quad \sum_{k=1}^m a_k b_{k2} \quad \dots \quad \sum_{k=1}^m a_k b_{kn} \right] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_k b_{kl} c_l.$$

$$- \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^n b_{1l} c_l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^n b_{ml} c_l \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m a_k \left(\sum_{l=1}^n b_{kl} c_l \right) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_k b_{kl} c_l.$$

Asszociativitás következményei

m Több mátrix szorzatát nem kell zárójelezni.

- Ha $\mathbf{D} = \mathbf{ABC}$, akkor

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj}.$$

- A fizikusok által használt **Einstein-konvenció**: az indexelt változók szorzatainak összegében a szumma jelek feleslegesek, hisz azokra az indexekre kell összegezni, amelyek legalább kétszer szerepelnek, míg az egyszer szereplőkre nem:

$$d_{ij} = a_{ik} b_{kl} c_{lj}.$$

Mátrix hatványozása

D $A^1 := A$ és $A^{k+1} := A^k A$, itt $A \in R^{n \times n}$, ahol R tetszőleges gyűrű

m csak négyzetes mátrixok szorozhatók önmagukkal

Á $A^k A^m = A^{k+m}$

- $(A^k)^m = A^{km}$

K $A^0 = ?$

- precedencia-elv:

$$A^k A^0 = A^{k+0} = A^k.$$

D $A^0 = I_n$

Hatvány kiszámítása

P $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^n = ?$

M $A^2 = I \rightsquigarrow A^{2k} = I_2$ és $A^{2k+1} = A$.

P $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = ?$

M $B^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & \frac{k}{2^{k-1}}a \\ 0 & \frac{1}{2^k} \end{bmatrix}$ (teljes indukcióval!) $\rightsquigarrow \lim_{k \rightarrow \infty} B^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}$.

P Legyen $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$. Mennyi $p(C)$, ha $p(x) = x^3 + 2x^2 - 1$?

M $p(C) = C^3 + 2C^2 - I =$
 $\begin{bmatrix} 9 & 8 & -14 \\ 8 & 7 & -12 \\ 14 & 12 & -21 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -4 & -4 & 7 \\ -4 & -3 & 6 \\ -7 & -6 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

A tranzponálás tulajdonságai

$$\hat{A} \quad (A^T)^T = A,$$

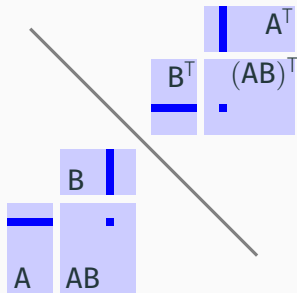
$$- (A + C)^T = A^T + C^T,$$

$$- (cA)^T = cA^T,$$

$$- (AB)^T = B^T A^T,$$

$$\left((AB)^T \right)_{ij} = (AB)_{ji} = (A)_{j*} (B)_{*i}.$$

$$\left(B^T A^T \right)_{ij} = (B^T)_{i*} (A^T)_{*j} \stackrel{*}{=} (A)_{j*} (B)_{*i}.$$



Mátrixszorzás inverze – mátrixok osztása

m A mátrixszorzás nem kommutatív ezért az $AX = B$ és az $YA = B$ egyenletek megoldása különböző is lehet.

- Be lehet vezetni egy balról és egy jobbról való osztást:

$$YA = B \implies Y = B/A \quad \text{B jobbról osztva A-val}$$

$$AX = B \implies X = A \setminus B \quad \text{B balról osztva A-val}$$

- Például

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \setminus \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ mert } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{és}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ mert } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Mátrix inverzének definíciója

D Mátrix inverze

Legyen $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ -es mátrix, ahol \mathbb{F} test. Azt mondjuk, hogy A **invertálható**, ha létezik olyan B mátrix, melyre

$$AB = BA = I_n.$$

A B mátrixot A **inverzének** nevezzük, és A^{-1} -nel jelöljük. A nem invertálható mátrixot **szingulárisnak** nevezzük.

m Ha A inverze B , B inverze A .

$$- \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Á Egy mátrixnak egy inverze lehet. Tfh A inverze B és C :

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$$

m A^{-1} , precedenciaelv: $A^{-1}A = A^{-1+1} = A^0 = I$

Példa mátrix inverzére

D Amh az \mathbf{A} mátrix **nilpotens**, ha van olyan k pozitív egész, hogy $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$.

$$- \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Á Ha \mathbf{A} nilpotens, és $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ invertálható, és inverze $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{k-1}$.

$$\begin{aligned} \text{B } (\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{k-1}) \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A} - \mathbf{A}^2 - \dots - \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A}^k \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{A}^k \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

m Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, akkor $r(\mathbf{A})$ és $r(\mathbf{B})$ egyike sem lehet kisebb $r(\mathbf{I})$ -nél, azaz a mátrixok rendjénél.

Invertálható mátrix tulajdonságai

T

Invertálhatóság

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az alábbiak ekvivalensek:

1. A invertálható;
2. A oszlopvektorai lineárisan függetlenek;
3. A oszlopvektorai bázist alkotnak \mathbb{R}^n -ben;
4. A sorvektorai lineárisan függetlenek;
5. A sorvektorai bázist alkotnak \mathbb{R}^n -ben;
6. $r(A) = n$.

T

Szingularitás

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az alábbiak ekvivalensek:

1. A szinguláris;
2. A oszlopvektorai lineárisan összefüggők;
3. $\dim(\mathcal{O}(A)) < n$;
4. A sorvektorai lineárisan összefüggők;
5. $\dim(\mathcal{S}(A)) < n$;
6. A bármely lépcsős alakjának van zérus sora, így $r(A) < n$.

Elemi mátrixok inverze

elemi mátrix	sorművelet	inverz sorművelet	inverz mátrix
E_{ij}	$S_i \leftrightarrow S_j$	$S_i \leftrightarrow S_j$	$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$
$E_i(c)$	cS_i	$\frac{1}{c}S_i$	$E_i(c)^{-1} = E_i(\frac{1}{c})$
$E_{ij}(c)$	$S_i + cS_j$	$S_i - cS_j$	$E_{ij}(c)^{-1} = E_{ij}(-c)$

Á Inverz kiszámítása elemi sorműveletekkel

A négyzetes \mathbf{A} mátrix invertálható, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ mátrix elemi sorműveletekkel $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ alakra hozható, ekkor \mathbf{A} inverze \mathbf{B} . Ha $\text{rref}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{I}$, akkor \mathbf{A} nem invertálható.

- B** Az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ tekinthető egy szimultán egyenletrendszernek, mely pontosan akkor oldható meg (akkor viszont egyértelműen), ha $\text{rref}[\mathbf{A}|\mathbf{I}] = [\mathbf{I}|\mathbf{B}]$, és ekkor $\mathbf{X} = \mathbf{B}$.
- Ha $\text{rref}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{I}$, azaz $r(\mathbf{A}) < n$, akkor $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ nem oldható meg, mivel $r(\mathbf{I}) = n$ miatt $r[\mathbf{A}|\mathbf{I}] = n > r(\mathbf{A})$.
 - Ha $r(\mathbf{A}) = n$, akkor az $\mathbf{YA} = \mathbf{I}$ egyenlet is megoldható, hisz az ekvivalens az $\mathbf{A}^T\mathbf{Y}^T = \mathbf{I}$ egyenlettel, ami $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T) = n$ miatt megoldható, és a korábbi megjegyzés szerint $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

Az inverz létezése

T **Az inverz létezéséhez elég egy feltétel**

A négyzetes \mathbf{A} mátrix pontosan akkor invertálható, ha létezik olyan \mathbf{B} mátrix, hogy az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ és a $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ feltételek egyike teljesül. Ha ilyen \mathbf{B} mátrix létezik, az egyértelmű.

B Következik az előző tételből.

Példák inverz kiszámítására

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ mert}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

2×2 -es mátrix inverze

Á Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha $ad - bc \neq 0$, és ekkor

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

B mátrixszorzással ellenőrizzük

- a feltétel elégségességét a képlet igazolja
- szükségesség: $ad - bc = 0$, azaz $ad = bc \iff \mathbf{A}$ egyik sora a másik skalárszorosa
- ekkor \mathbf{A} nem alakítható elemi sorműveletekkel egységmátrixszá.

Az inverz alaptulajdonságai

T **A** és **B** egyaránt $n \times n$ -es invertálható mátrixok

a) \mathbf{A}^{-1} invertálható, és inverze $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$,

b) $c \neq 0$ esetén $c\mathbf{A}$ invertálható, és inverze $\frac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}$,

c) \mathbf{AB} invertálható, és inverze $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,

d) \mathbf{A}^k invertálható, és inverze $(\mathbf{A}^k)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^k$, definíció szerint ezt értjük \mathbf{A}^{-k} -n,

e) \mathbf{A}^T invertálható, és $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

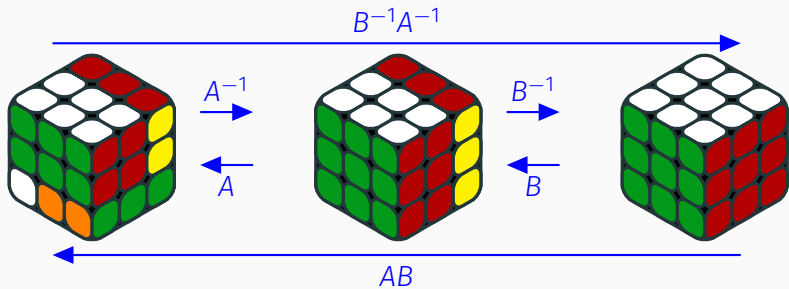
B c) Az

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

szorzat bizonyítja, hogy \mathbf{AB} invertálható, és inverze $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

- d) Az $(\mathbf{A}^k)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^k$ egyenlőséget igazolja:

$$\underbrace{\mathbf{AA} \dots \mathbf{AA}}_{k \text{ tényező}} \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \dots \mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \dots \mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}} \underbrace{\mathbf{AA} \dots \mathbf{AA}}_{k \text{ tényező}} = \mathbf{I}$$



T Az invertálhatóság és az egyenletrendszerek

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ mátrix. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. \mathbf{A} invertálható;
2. az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}$ mátrixegyenlet bármely $n \times t$ -es \mathbf{B} mátrixra egyértelműen megoldható;
3. az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer bármely n dimenziós \mathbf{b} vektorra egyértelműen megoldható;
4. a homogén lineáris $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek a triviális $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ az egyetlen megoldása;
5. \mathbf{A} redukált lépcsős alakja \mathbf{I} ;
6. \mathbf{A} előáll elemi mátrixok szorzataként.

Mátrixegyenlet megoldása mátrixinvertálással

P Oldjuk meg a következő egyenletrendszert mátrixinvertálással!

$$2x + y = 2$$

$$5x + 3y = 3$$

M Az együtthatómátrix és inverze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix},$$

így az ismeretlenek (x, y) vektorára

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Mátrixegyenlet megoldása mátrixinvertálással

P Oldjuk meg az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

1M Az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenlet megoldása:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 3 & -9 & -8 \end{bmatrix}.$$

2M Minden $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ alakú mátrixegyenlet invertálható \mathbf{A} esetén megoldható szimultán egyenletrendszerként az $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ mátrix redukált lépcsős alakra hozásával. Tehát így számolható minden $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ szorzat:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right] \implies \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -9 & -8 \end{array} \right]$$

Mátrix elemi mátrixok szorzatára bontása

- Ha \mathbf{A} -t elemi sorműveletek \mathbf{I} -be viszik, akkor a sorműveletek inverzei fordított sorrendben elvégezve \mathbf{I} -t \mathbf{A} -ba.

Elemi sorműveletek Elemi mátrixok Elemi mátrixok inverzei

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \downarrow \quad S_2 - 3S_1 \quad \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \downarrow \quad -S_2 \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \downarrow \quad S_1 - 2S_2 \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{E}_3 \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- \mathcal{B} és \mathcal{C} az \mathbb{R}^n két bázisa. Legyen $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Ekkor

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{T}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}, \quad \text{és} \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{T}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}.$$

- A második egyenletbe helyettesítve az első kapjuk, hogy

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{T}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} \mathbf{T}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

azaz $\mathbf{T}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} \mathbf{T}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ minden vektort önmagába visz, tehát egyenlő az egységmátrixszal.

- $\mathbf{T}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} \mathbf{T}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{I}$, azaz e mátrixok egymás inverzei.

Báziscsere

P $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, $\mathcal{C} = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$,
 $T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = ?$

1M A bázisokból leolvasható

$$T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{E}} = T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}}^{-1}$, így $T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{E}} T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$.

$$T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Báziscsere (folytatás)

2M $\mathbf{T}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}} \mathbf{T}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{T}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$, ahol $\mathbf{T}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ az ismeretlen mátrix.

megoldása a $[\mathbf{T}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}} | \mathbf{T}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}]$ redukált lépcsős alakjából:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

- Tehát

$$\mathbf{T}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mátrixműveletek algebrája

Műveletek speciális mátrixokkal

T **Műveletek diagonális mátrixokkal**

Legyen $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, és legyen k egész szám. Ekkor

1. $\mathbf{AB} = \text{diag}(a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n)$,
2. $\mathbf{A}^k = \text{diag}(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$, speciálisan
3. $\mathbf{A}^{-1} = \text{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1})$.

D Permutáló mátrix, kigyó

A diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixot **kigyónak** (más néven **transzverzálisnak**) nevezzük, speciálisan az egységmátrixból ugyanígy kapott mátrixot **permutáló mátrixnak** (más néven **permutációmátrixnak**) hívjuk.

- Az alábbi mátrixok mindegyike kigyó, az utolsó kettő egyúttal permutáló mátrix is:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Műveletek permutáló mátrixokkal

- Á Bármely két azonos méretű permutáló mátrix szorzata és egy permutáló mátrix bármely egész kitevős hatványa permutáló mátrix.
- B $\mathbf{P}\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_k^T\mathbf{P} = \mathbf{e}_\ell^T \rightsquigarrow$ minden sorban és oszlopban pontosan egy 1-es.
- Á Permutáló mátrix inverze megegyezik a transzponáltjával, azaz ha \mathbf{P} permutáló mátrix, akkor $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$.
- B $(\mathbf{P}\mathbf{P}^T)_{ij} = \mathbf{P}_{i*} \cdot \mathbf{P}_{i*} = 1$, míg $i \neq j$ esetén

$$(\mathbf{P}\mathbf{P}^T)_{ij} = (\mathbf{P})_{i*}(\mathbf{P}^T)_{*j} = (\mathbf{P})_{i*} \cdot (\mathbf{P})_{j*} = 0.$$

$$\mathbf{P} \quad \mathbf{P}\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Háromszögmátrixok

D főátló alatt csak 0-elemek: **felső háromszögmátrix**

D főátló felett csak 0-elemek: **alsó háromszögmátrix**

D háromszögmátrix főátlójában csupa 1-es: **egység háromszögmátrixról** (unit triangular matrix)

m a háromszögmátrix fogalmát általában négyzetes mátrixokra értjük, de a fenti definíciókkal kiterjeszthető téglalap alakú mátrixokra is.

Á ha egy konzisztens egyenletrendszer együtthatómátrixa háromszögmátrix, akkor behelyettesítésekkel megoldható (angolban backward/forward substitution aszerint, hogy a mátrix felső/alsó háromszögmátrix).

Műveletek háromszögmátrixokkal

- Á Felső háromszögmátrixok összege, szorzata, és invertálható felső háromszögmátrix inverze felső háromszögmátrix. Alsóra analóg.
- Á Egy háromszögmátrix pontosan akkor invertálható, ha főátlóbeli elemeinek egyike sem zérus.

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok

D szimmetrikus mátrix: $A^T = A$

D ferdén szimmetrikus mátrix: $A^T = -A$

P $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 \\ -9 & 2 & 9 \\ -9 & -9 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

M A szimmetrikus, B egyik sem, C ferdén szimmetrikus.

Á Ferdén szimmetrikus mátrix főátlójában 0-k állnak.

Á Szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze szimmetrikus. Ferdén szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze ferdén szimmetrikus.

Á Szimmetrikus mátrixok szorzata szimmetrikus \iff felcserélhetők.

B $(\Leftarrow) (AB)^T = B^T A^T = BA = AB,$

$(\Rightarrow) AB = (AB)^T = B^T A^T = BA.$

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixokról 2

- T **Felbontás szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrix összegére** Minden négyzetes mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként, nevezetesen minden \mathbf{A} négyzetes mátrixra

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}_{\text{szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)}_{\text{ferdén szimm.}}$$

B $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T + (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T - (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{A} = -(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

- T **$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ szimmetrikus** tetszőleges \mathbf{A} mátrix esetén.

B $(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T \mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$.

Mátrixok gyorsorzása*

- **Strassen-formulák, 1969:** $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ és mindegyik 2×2 -es mátrix, akkor a szorzás elvégezhető a következő formulákkal:

$$d_1 = (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) \quad c_{11} = d_1 + d_4 - d_5 + d_7$$

$$d_2 = (a_{21} + a_{22})b_{11} \quad c_{21} = d_2 + d_4$$

$$d_3 = a_{11}(b_{12} - b_{22}) \quad c_{12} = d_3 + d_5$$

$$d_4 = a_{22}(-b_{11} + b_{21}) \quad c_{22} = d_1 + d_3 - d_2 + d_6$$

$$d_5 = (a_{11} + a_{12})b_{22}$$

$$d_6 = (-a_{11} + a_{21})(b_{11} + b_{12})$$

$$d_7 = (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22})$$

- $2^n \times 2^n$ -es mátrixokat 2×2 -es blokkokra osztjuk, majd rekurzívan alkalmazzuk a fenti képleteket.

A gyorsorzás használhatósága*

- A standard mátrixszorzás műveletigénye $2n^3 - n^2$ (ebből n^3 szorzás és $n^3 - n^2$ összeadás). A Strassen-formulákkal való szorzásé $n = 2^k$ esetén legföljebb $7 \cdot 7^k - 6 \cdot 4^k$. Ez $k = \lceil \log_2 n \rceil$ esetén $cn^{\log_2 7} \approx cn^{2.8074}$ felső becslést ad.
- Coppersmith–Winograd 1990: $cn^{2.375477}$
- javítások, 2010: $cn^{2.374}$, 2011: $cn^{2.3728642}$, 2014: $cn^{2.3728639}$.
- A Strassen-algoritmus gyengéje: nagyobb memóriahasználat, numerikusan instabilabb.
- A Strassen utáni algoritmusoknak csak elméleti jelentősége van, a gyakorlatban nem használják, mert csak akkora mátrixokon lenne előnyös, amekkorákat nem szoroznak össze a mai gépek.

Mátrixműveletek algebrája

LU-felbontás

- m Ha egy \mathbf{A} mátrixból el lehet jutni egy \mathbf{U} felső háromszögalakhoz olyan sorműveletekkel, melyekben egy sor konstansszorosát **csak alatta lévő** sorhoz adjuk és sorokat **nem cserélünk**, akkor

$$\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}, \quad (1)$$

azaz $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alakra hozható (lower, upper).

- D AMH az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ mátrix egy $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alakú tényezőkre bontása **LU-felbontás** (-faktorizáció, -dekompozíció), ha \mathbf{L} alsó egység háromszögmátrix, \mathbf{U} felső háromszögmátrix.
- Nincs minden mátrixnak LU-felbontása, pl.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

- Az LU-felbontás nem egyértelmű, pl. tetszőleges x -re

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LU-felbontás kiszámítása

P Határozzuk meg $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ LU-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 - 1/2S_1} \left(E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 - 1/4S_1} \left(E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 - 1/2S_2} \left(E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$E_3 E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U.$$

LU-felbontás kiszámítása

- Tehát $\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$, amiből az $(\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)^{-1} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}$ mátrixszal való beszorzás után $\mathbf{A} = (\mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1})\mathbf{U}$.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Algoritmus az LU-felbontás kiszámítására

A Algoritmus a Gauss-elimináció lépcsős alak helyett felső háromszögalakú mátrixot adó megváltoztatásával, ahol

$\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ (\mathbb{F} test):

1. $\mathbf{L} \leftarrow \mathbf{I}_m$, $\mathbf{U} \leftarrow \mathbf{A}$, $s = \min(m, n + 1)$, $t \leftarrow 1$
2. ha $u_{tt} = 0$ és $\exists k > t : u_{kt} \neq 0$, akkor „nincs LU-felbontás”
STOP
3. $u_{kt} \neq 0$ eliminálása $k > t$ -re az $S_k - l_{kt}S_t$ sorművelettel;
 $(\mathbf{L})_{kt} \leftarrow l_{kt}$
4. $t \leftarrow t + 1$
5. ha $t = s$, akkor „az LU-felbontás: $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ ” STOP
6. menj 2.-re

T **Az LU-felbontás létezése és egyértelműsége**

A fenti algoritmusra igaz, hogy

- (a) pontosan akkor áll le hibaüzenettel, ha \mathbf{A} -nak nincs LU-felbontása,*
- (b) a megkonstruált \mathbf{L} és \mathbf{U} mátrixok LU-felbontást adnak,*
- (c) ha \mathbf{A} invertálható, akkor e felbontás egyértelmű.*

Az algoritmus LU-felbontást ad

B Csak (b)-t bizonyítjuk: jelölje az $S_j - l_{ji}S_i$ sorművelet elemi mátrixát E_{ji} ($1 \leq i < j \leq m$).

- Legyen

$$E = (E_{m,m-1})(E_{m,m-2}E_{m-1,m-2}) \dots (E_{m2} \dots E_{42}E_{32})(E_{m1} \dots E_{31}E_{21}).$$

- Az algoritmus szerint ekkor $EA = U$.

- $EL = ?$

- L főátlójában csupa 1, ji -edik helyén l_{ji} áll, ezért az elemi E_{ji} mátrix épp ezt az elemet fogja eliminálni, és így E minden főátló alatti elemet eliminál, azaz $EL = I$.

- Eszerint $E^{-1} = L$, tehát $A = E^{-1}U = LU$.

Egyenletrendszer megoldása LU-felbontással

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ megoldható $\iff \mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ megoldható.
- E két egyenletrendszer visszahelyettesítésekkel megoldható.
- Oldjuk meg: $4x_1 + 8x_2 + 8x_3 = 8$
 $2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 4$
 $x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4$

- $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{y} = (8, 0, 2)$
- $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$.

Mátrix invertálása LU-felbontással

- $AX = I \iff LY = I, UX = Y.$

- Invertáljuk a $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixot!

- $LY = I:$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

- $UX = Y:$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & -1 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Az LU-felbontás a gyakorlatban

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

↓

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

↓

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 7/4 & 7/2 \end{bmatrix}$$

↓

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 2.00 & 4.00 & 1.00 \\ 1.00 & 2.00 & 4.00 \end{bmatrix}$$

↓

$$\begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.50 & 3.50 & 0.00 \\ 1.00 & 2.00 & 4.00 \end{bmatrix}$$

↓

$$\begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.50 & 3.50 & 0.00 \\ 0.25 & 1.75 & 3.50 \end{bmatrix}$$

↓

$$\begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.50 & 3.50 & 0.00 \\ 0.25 & 0.50 & 3.50 \end{bmatrix}$$

Mire jó?

- m Az LU-felbontás műveletigénye megegyezik a Gauss-kiküszöbölésével: egy n -edrendű mátrixra nagyságrendileg $2n^3/3$.
- Egyenletrendszer együtthatómátrixának LU-felbontásához nincs szükség az egyrészt jobb oldalára (így használható akkor is, ha az még nem ismeretes, vagy több van belőle).
- Az LU-felbontás ismeretében több mátrixokkal kapcsolatos számítás gyorsabban elvégezhető (inverz, determináns,...).
- Az LU-felbontás memóriatakarékos, és vannak olyan speciális mátrixosztályok (pl. szalagmátrixok, ritka mátrixok), melyekre van a kiküszöbölésnél gyorsabb algoritmus az LU-felbontásra.
- A komputer algebra programok ha egy mátrixon LU-felbontást igénylő számítást végeznek, azt későbbi számításoknál fölhasználják, növelve a számítás hatékonyságát.

Á Egy \mathbf{P} permutáló mátrixszal való balról szorzással minden mátrix olyan alakra hozható, melynek van LU-felbontása:

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}, \text{ azaz } \mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{LU}.$$

D Egy tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ mátrixnak egy permutáló, egy egység főátlójú négyzetes alsó háromszög- és egy $m \times n$ -es felső háromszögmátrix szorzatára való bontását **PLU-felbontásnak** nevezzük.

- m** Ha $m > n$, akkor **U** utolsó $m - n$ sora zérussor, ezért ezeket, és **L** utolsó $m - n$ oszlopa is elhagyható, vagyis ha $s = \min(m, n)$, akkor **P** $m \times m$ -es permutáló mátrix, **L** 1-esekből álló főátlójú $m \times s$ -es alsó, míg az **U** $s \times n$ -es felső háromszögmátrix.

Például

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

PLU-felbontás részleges főelemkiválasztással

- P Részleges főelemkiválasztással (a főátlóbeli elem alatti legnagyobb abszolút értékű elemet kiválasztjuk, és sorcserével a főátlóba tesszük, és a numerikus hibák csökkentése érdekében vele eliminálunk) határozzuk meg a PLU-felbontását:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

- m Ha egy a adat hibája (kerekítési, számítási vagy mérési) ε , és $|b| < |c|$, akkor

$$\left| \frac{\varepsilon}{b} \right| > \left| \frac{\varepsilon}{c} \right|,$$

tehát $\frac{a}{c}$ hibája kisebb, mint $\frac{a}{b}$ hibája.

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ -1/4 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A **PLU-felbontás algoritmus**a: Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ (\mathbb{F} test):

1. $\mathbf{L}_0 \leftarrow \mathbf{I}_m, \mathbf{A}_0 \leftarrow \mathbf{U}_0 \leftarrow \mathbf{A}, s = \min(m, n + 1), t \leftarrow 1$

2. ha $u_{tt} = 0$ és $\forall k > t : u_{kt} = 0$, akkor

$$\mathbf{L}_t \leftarrow \mathbf{L}_{t-1}, \mathbf{A}_t \leftarrow \mathbf{A}_{t-1}, \mathbf{U}_t \leftarrow \mathbf{U}_{t-1}, \mathbf{P}_t = \mathbf{I}$$

$t \leftarrow t + 1$ és menj 2-re

3. ha $u_{tt} = 0$ és $u_{kt} \neq 0$ valamely $k > t$ -re, akkor legyen

\mathbf{P}_t az $S_t \leftrightarrow S_k$ mátrixa,

$$\mathbf{U}'_t = \mathbf{P}_t \mathbf{U}_{t-1}, \mathbf{L}'_t = \mathbf{P}_t \mathbf{L}_{t-1} \mathbf{P}_t,$$

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{P}_t \mathbf{A}_{t-1} = (\mathbf{P}_t \mathbf{L}_{t-1} \mathbf{P}_t) (\mathbf{P}_t \mathbf{U}_{t-1}) = \mathbf{L}'_t \mathbf{U}'_t.$$

4. \mathbf{U}'_t -ben $u_{kt} \neq 0$ eliminálása minden $k > t$ -re az $S_k - l_{kt} S_t$ sorművelettel; $(\mathbf{L}'_t)_{kt} \leftarrow l_{kt}$,

e lépések végén kapjuk az $\mathbf{U}_t, \mathbf{L}_t$ és $\mathbf{A}_t = \mathbf{L}_t \mathbf{U}_t$ mátrixokat.

5. $t \leftarrow t + 1$

6. ha $t = s$, akkor $\mathbf{P} = \mathbf{P}_s \mathbf{P}_{s-1} \dots \mathbf{P}_1, \mathbf{L} = \mathbf{L}_s, \mathbf{U} = \mathbf{U}_s$; ekkor

$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$; „a PLU-felbontás: $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{LU}$ ” STOP

7. menj 2-re