BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Bevezetés az algebrába 1

BMETE92AX23

Egyenletrendszerek

H406 – 2016-10-03

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

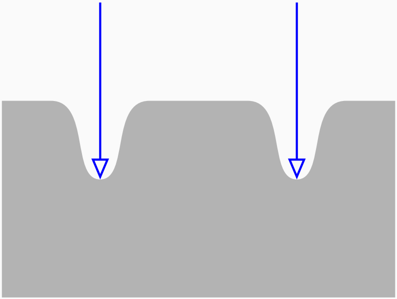
Vektorok (ismétlés)

Vektorok (ismétlés)

A 2- és 3-dimenziós tér vektorai

Kötött vektor

(a)

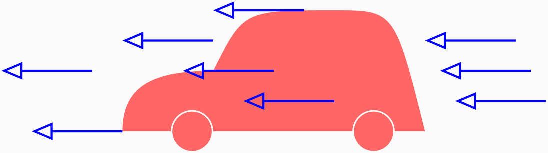


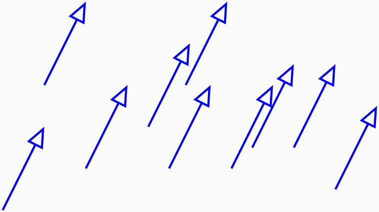
(b)

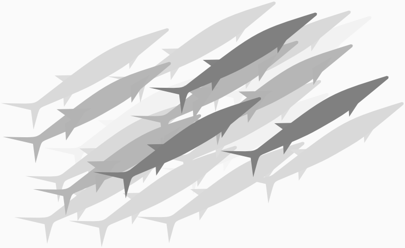
(a) elmozdulásvektor,

(b) rugalmas testen alakváltozást okozó erő vektora.

Szabad vektor – nekünk ez kell



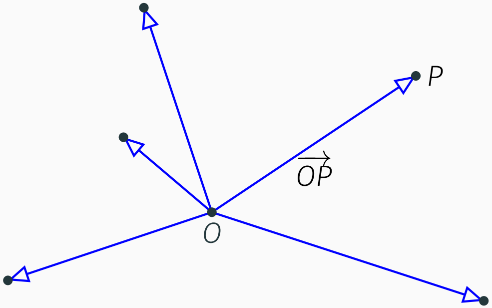




- Ha az irányított szakasz a hal, a vektor a halraj.
- Ekvivalencia reláció: két irányított szakasz ekvivalens, ha egyik a másikba „tolható”. A vektorok az ekvivalenciaosztályok.

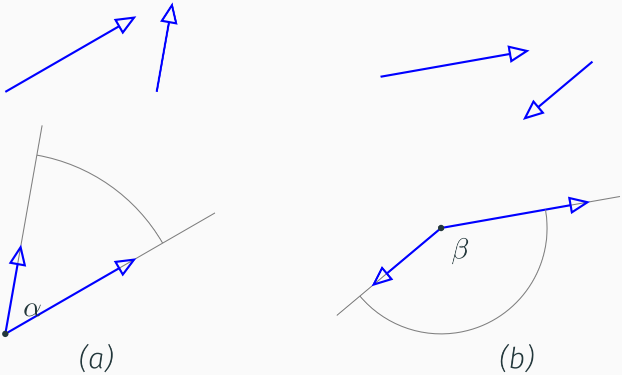
Origó

- A közös kezdőpont



- A sík pontjai és vektorai közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés: egy P pontnak az $\overrightarrow{OP}$ vektor felel meg, az origónak a nullvektor.

Vektorok szöge



Két vektor szöge ($0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$)

Vektorok (ismétlés)

Vektorműveletek

D

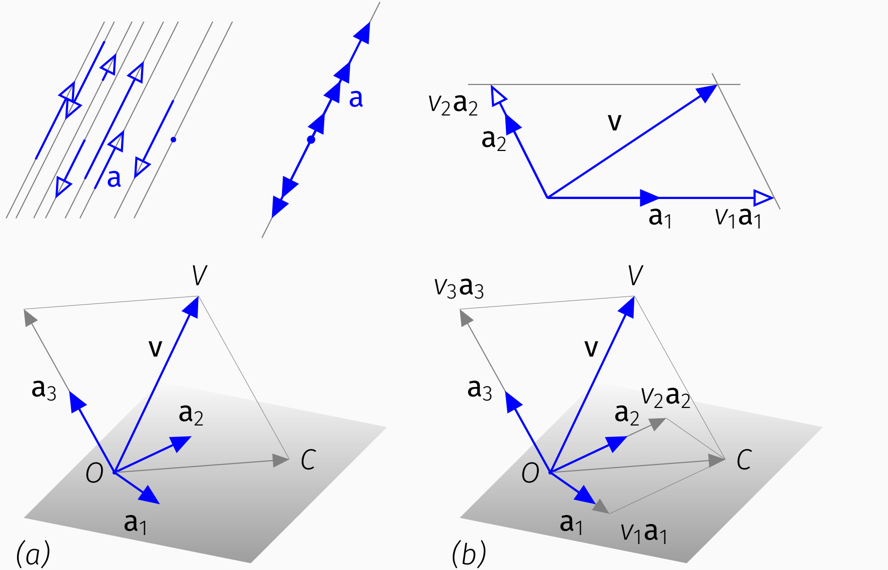
Lineáris kombináció

Az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_k$ vektorok *lineáris kombinációján* egy

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$$

alakú vektort értünk, ahol $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor *előáll* az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha vannak olyan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok, hogy $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$.

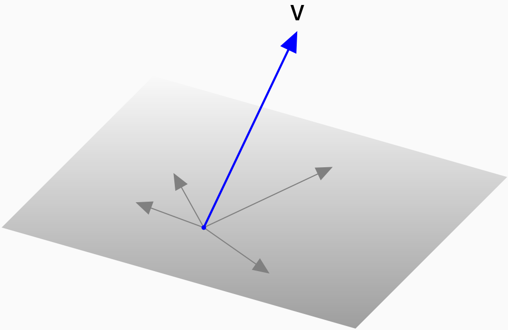
Egy, két és három vektor lineáris kombinációi

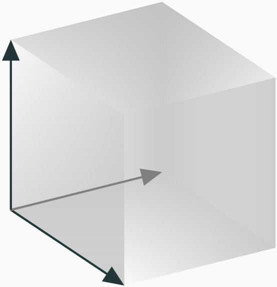


Vektorok lineáris függetlensége, lineáris összefüggősége

D **Vektorok függetlensége**

Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{v}$ vektor *lineárisan független* az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...$\mathbf{a}_n$ ($n \geq 1$) vektoroktól, ha $\mathbf{v}$ nem fejezhető ki e vektorok lineáris kombinációjaként. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...$\mathbf{a}_n$ ($n \geq 2$) vektorok *lineárisan függetlenek* ha e vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Ha legalább egyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz legalább egyikük *lineárisan függ* a többitől, akkor e vektorokat *lineárisan összefüggőknek* nevezzük. Az egyetlen vektorból álló vektorrendszert lineárisan függetlennek tekintjük, ha a vektor nem a zérusvektor.


v



Vektor előállítása lineáris kombinációként

T **Síkbeli vektor felbontása**

Ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ egy sík két lineárisan független vektora, akkor a sík minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1 és v_2 valós számok, hogy $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$.

T **Térbeli vektor felbontása**

Ha $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ három lineárisan független térbeli vektor, akkor a tér minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1, v_2 és v_3 valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3.$$

Vektorok (ismétlés)

Távolság, szög, orientáció

D

Két vektor skaláris szorzata

Két vektor *skaláris szorzatán* a vektorok abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatát $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ jelöli, tehát

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle,$$

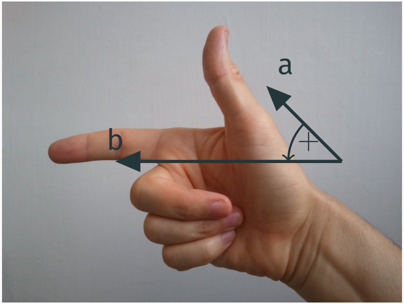
ahol a két vektor által bezárt szög $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$.

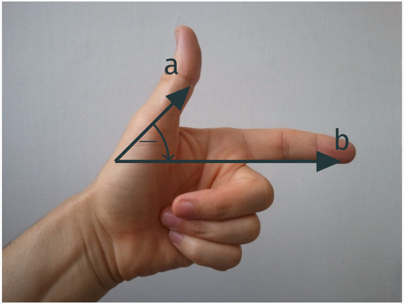
T

Mikor 0 a skaláris szorzat?

Két vektor skaláris szorzata pontosan akkor 0, *ha a két vektor merőleges egymásra.*

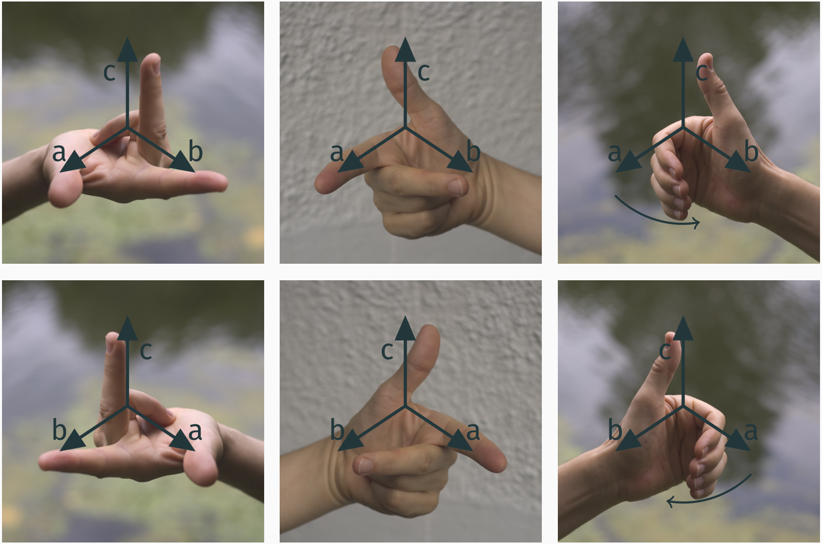
Merőlegesség és irányítás a síkban (orientáció)





Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ irányított szögét $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\sphericalangle}$ jelöli. Tehát míg $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = (\mathbf{b}, \mathbf{a})_{\angle}$, addig $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\sphericalangle} = -(\mathbf{b}, \mathbf{a})_{\sphericalangle}$, és ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\sphericalangle} = \pi/2$, akkor $(\mathbf{a}, -\mathbf{b})_{\sphericalangle} = -\pi/2$.

Merőlegesség és orientáció a térben



Vektori szorzás

D

Vektori szorzás

A 3-dimenziós tér két vektorának *vektori szorzatán* azt az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-vel jelölt vektort értjük, melynek

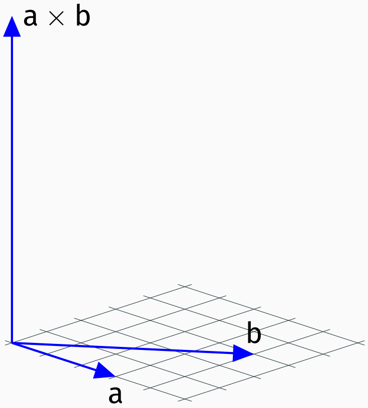
- *abszolút értéke* a két vektor abszolút értékének és közbezárt szöge szinuszának szorzata,
- *iránya* merőleges mindkét vektor irányára és – ha a szorzat nem a nullvektor, akkor – $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

T

Mikor 0 a vektori szorzat?

Két térbeli vektor vektori szorzata pontosan akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos.

Vektori szorzás

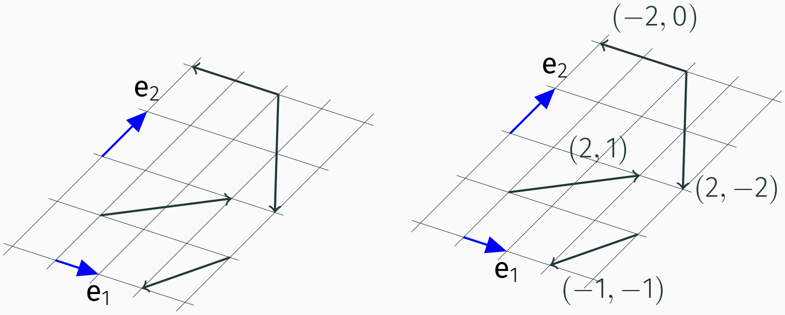


Vektorok koordinátás alakban

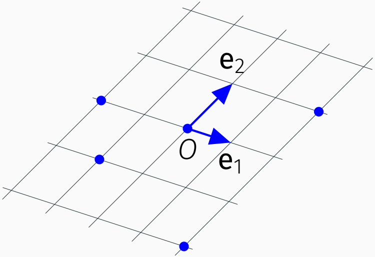
Vektorok koordinátás alakban

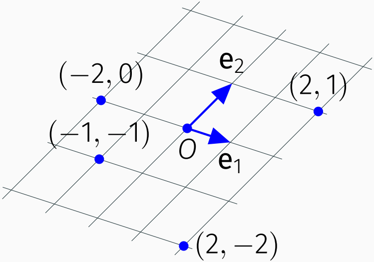
Descartes-féle koordinátarendszer

Vektorok koordinátái

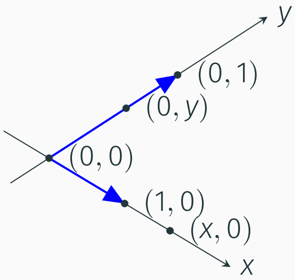


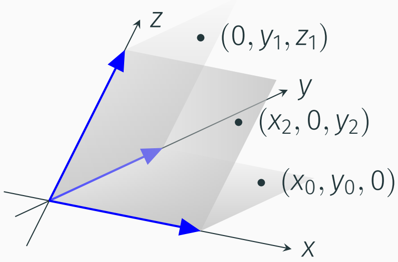
Pontok koordinátái





Pontok a koordinátatengelyen és koordinátasíkon





Műveletek koordinátás alakban megadott vektorokkal

Á

Vektorműveletek koordinátás alakja

Adva van a térben egy koordinátarendszer és abban két tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *és* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *vektor, és egy tetszőleges* $c \in \mathbb{R}$ *valós szám.*

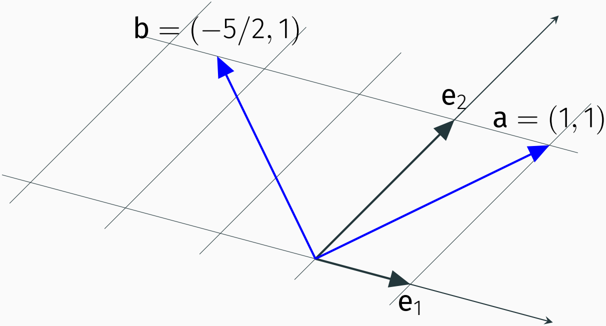
$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), \\
\mathbf{u} - \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3), \\
c\mathbf{u} &= c(u_1, u_2, u_3) = (cu_1, cu_2, cu_3).
\end{aligned}$$

Az oszlopvektor jelölést használva

$$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \pm v_1 \\ u_2 \pm v_2 \\ u_3 \pm v_3 \end{bmatrix}, \quad c\mathbf{u} = c \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{bmatrix}.$$

Skaláris szorzás koordinátarendszerben

P Tekintsünk egy olyan síkbeli koordinátarendszert, ahol az első alapvektor hossza 1, a másodiké 2, és a kettőjük közti szög $\pi/3$. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 1)$ és a $\mathbf{b} = (-5/2, 1)$ vektorok skaláris szorzatát.



Skaláris szorzás koordinátarendszerben

M Az alapvektorok hosszát és szögét ismerve ki tudjuk számítani az alapvektorok skaláris szorzatait:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 2^2 = 4, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 1.$$

$$\rightsquigarrow \ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot (-\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$
$$= -\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (1 - \frac{5}{2})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} + 4$$
$$= 0.$$

E koordinátarendszerben a skaláris szorzás általános képlete:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\ &= u_1v_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (u_1v_2 + u_2v_1)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + u_2v_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 4u_2v_2.\end{aligned}$$

- Ha az alapvektorok merőlegesek, más szóval *ortogonálisak* egymásra és egységnyi hosszúak, az alapvektorrendszert *ortonormált bázisnak* nevezzük.
- $$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j})\cdot(v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j})\\ &= u_1v_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+(u_1v_2+u_2v_1)\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+u_2v_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}\\ &= u_1v_1+u_2v_2\end{aligned}$$

Á **Skaláris szorzat ortonormált koordinátarendszerben**

A síkbeli $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ *és* $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$, *illetve a térbeli* $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ *és* $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ *vektorok skaláris szorzata ortonormált koordinátarendszerben*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1v_1+u_2v_2,\ \ \textit{illetve}\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3.$$

Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata

- Mutassuk meg, hogy az (a, b) és a (c, d) vektorok által kifeszített parallelogramma területe

$$|ad - bc|.$$

  Mi a jelentése az $ad - bc$ előjelének?
- $|(a, b, 0) \times (c, d, 0) = (0, 0, ad - bc)| = |ad - bc|$
- Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata

$$|a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1|$$

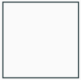
  Mi a jelentése az $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$ előjelének?
- $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

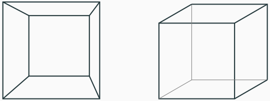
Vektorok koordinátás alakban

$\mathbb{R}^n$

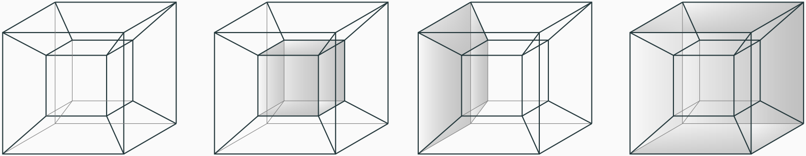
A négydimenziós kocka ábrázolása a síkban

1D:

2D: 

3D: 

4D:



D **Műveletek $\mathbb{R}^n$-ben**

Legyen $c \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges vektora. E két vektor összegét, egyikük c-szeresét és akaláris szorzatukat a következő képletekkel definiáljuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \\ c\mathbf{u} &= (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n. \end{aligned}$$

m A definíciók természetes módon kiterjeszthetők $\mathbb{F}^n$-re, ahol $\mathbb{F}$ tetszőleges test.

A vektorműveletek tulajdonságai

T Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, $c, d \in \mathbb{R}$ teszőleges.

a)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	kommutatív
b)	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	asszociatív
c)	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	zérusvektor
d)	$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	szorzás 0-val és 1-gyel
e)	$c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$	a két szorzás kompatibilis
f)	$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$	disztributív
g)	$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$	disztributív
1)	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	kommutatív
2)	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$	disztributív
3)	$(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$	a két szorzás kompatibilis

4) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

m *4)*-et kivéve minden igaz tetszőleges $\mathbb{F}$ test fölötti $\mathbb{F}^n$-re is.

Lineáris kombináció, lineáris függetlenség

Á Az $\mathbb{F}^n$-beli $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$,..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ vektorok lineárisan függetlenek, és $\mathbb{F}^n$ minden vektora egyértelműen előáll ezek lineáris kombinációjaként!

T **Lineáris függetlenség**

L! $\mathbb{F}$ test. Tetszőleges $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{F}^n$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:

1. *$\mathcal{V}$ lineárisan független, ($k > 1$: egyik vektora sem fejezhető ki a többi lin. komb.-jaként, $k = 1$: $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$).*
2. *A zérusvektor csak egyféleképp – a triviális módon – áll elő $\mathcal{V}$ lineáris kombinációjaként. (A c_1, c_2,...,c_k skalárokkal vett $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$ lineáris kombináció csak akkor lehet a nullvektor, ha $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.*

- B Ha a vektorrendszer csak egy vektorból áll, akkor valóban, pontosan akkor lineáris független, azaz pontosan akkor nem a nullvektor, ha a $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ csak $c = 0$ esetén állhat fenn.
- ($\Longleftarrow$) Tfh valamelyik vektor – például a $\mathbf{v}_1$ – kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{v}_1 = d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k$, vagyis átrendezés után $(-1)\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Mivel $\mathbf{v}_1$ együtthatója nem 0, így elő tudtuk állítani a nullvektort olyan lineáris kombinációként, melyben nem minden együttható 0.
- ($\Longrightarrow$) Ha van olyan – nem csupa 0 együtthatójú – lineáris kombináció, mely a nullvektorral egyenlő, azaz $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, de valamelyik együttható – például a c_1 – nem 0, akkor $\mathbf{v}_1$ kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként: $\mathbf{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{v}_2 - \ldots - \frac{c_k}{c_1}\mathbf{v}_k$.

Lineáris összefüggőség

T **A lineáris összefüggőség egy szükséges és elégséges feltétele**

L! $\mathcal{V} = \{\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \,\}$, $k \geqslant 2$, $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$. $\mathcal{V}$ pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha van olyan $t \geq 2$ index, hogy $\mathbf{v}_t$ a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_{t-1}$ vektorok lineáris kombinációja.

B Tfh a vektorrendszer összefüggő, és legyen t az a legkisebb egész, melyre a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_t$ vektorok már összefüggők.

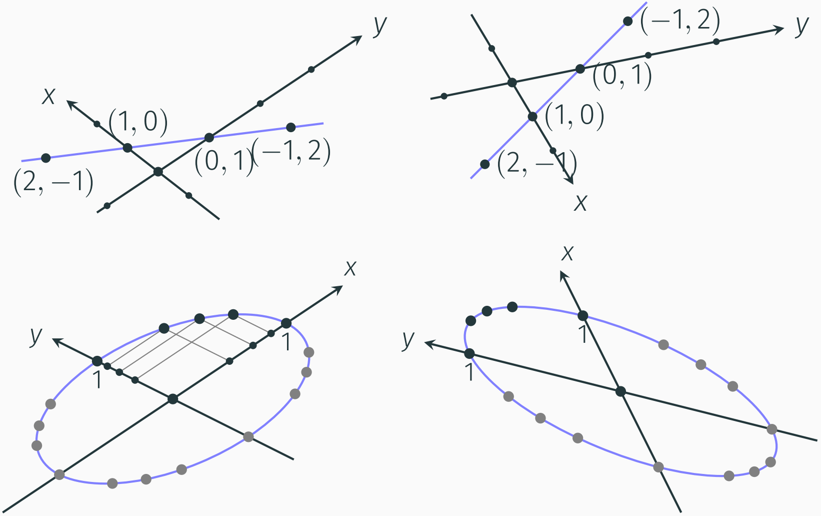
- Mivel $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, ezért az első vektor nem lehet összefüggő, ezért $t \geq 2$. E vektorok összefüggősége miatt vannak olyan c_i konstansok, melyekkel $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$.
- Biztos, hogy $c_t \neq 0$, különben már a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_{t-1}$ vektorok is lineáris összefüggők lennének, és ez ellentmond t definíciójának. Így $\mathbf{v}_t = \frac{-c_1}{c_t}\mathbf{v}_1 + \frac{-c_2}{c_t}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{-c_{t-1}}{c_t}\mathbf{v}_{t-1}$.
- A másik irányú implikáció definíció szerint igaz.

Lineáris egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszerek

Alakzatok egyenletei: egyenes, sík, hipersík

Alakzatok és egyenletek



D

Implicit egyenletrendszer

Egy $\mathbb{F}^n$-beli alakzat *(implicit) egyenletrendszerén* olyan egyenletrendszert értünk, melynek egyszerre minden egyenletét kielégítik a térnek az alakzathoz tartozó pontjai, de más pontok nem. Az egyenletet *vektoregyenletnek* nevezzük, ha nem a pontok koordinátáira, hanem a pontokba mutató vektorokra írjuk fel. Általános alakjuk:

$$\left\{\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{illetve} \qquad \left\{\begin{aligned} F_1(\mathbf{r}) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}\right.$$

ahol $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$.

Alakzat explicit egyenletrendszere

D **Explicit egyenletrendszer**

Egy $\mathbb{F}^n$-beli alakzat *(explicit) egyenletrendszerén* olyan egyenletrendszert értünk, melyben az egyenletek bal oldalán a pontok koordinátáit megadó változók, jobb oldalán adott paraméterek függvényei szerepelnek. Általános, illetve vektoregyenlet alakja

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(t_1, t_2, \dots, t_k) \end{aligned} \qquad \text{ill.} \quad \mathbf{r} = \mathbf{f}(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

ahol $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2$,..., $t_k \in I_k$, és $I_1, \dots, I_k \subseteq \mathbb{F}$, ahol $\mathbf{f}$ egy $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^n$ függvény. (Szokás *paraméteres egyenletrendszernek* is nevezni.)

		Explicit vektoregyenlet	Implicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$Ax + By = C$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$
Térben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$Ax + By + Cz = D$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$
$\mathbb{R}^n$-ben	hipersík	???	$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$
	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	???
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	???
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	???

Lineáris egyenletrendszerek

Két geometriai modell

D Az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

alakra hozható egyenletet az x_1, x_2...x_n ismeretlenekben lineáris egyenletnek nevezzük, ahol a_1, a_2,... és a_n, valamint b konstansok. Az a_1, a_2,... és a_n konstansokat az egyenlet együtthatóinak, b-t az egyenlet konstans tagjának nevezzük.

P Lineárisak-e az x, y, illetve az x, y és z változókban?

- $xz - y = 0$, $x + 2y = 3^z$,
- $x \sin z + y \cos z + y = z^2$, $0 = 2$,
- $x = y$, $x = 3 - y + 2z$, $x - y + 0z = 0$, $x + y - 2z = 3$
- $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 2 = 0$, $x + y + 2z = 0$?

D Lineáris egyenletrendszeren ugyanazokban a változókban lineáris egyenletek egy véges halmazát értjük. Általános alakja:

$$\begin{array}{rcrcccrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \qquad (*)$$

ahol x_1, x_2,...x_n az ismeretlenek, a_{ij} együttható, b_i konstans tag. Ha mindegyik egyenlet konstans tagja 0, a lineáris egyenletrendszer homogén, egyébként inhomogén.

- Lineáris az x és y változókban:

$$\begin{aligned} ax + \quad y &= 2a \\ x - \frac{1}{a}y &= \quad 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - \quad y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 1 \\ 0 &= 2 \end{aligned} \qquad x + y = 1$$

Lineáris egyenletrendszer megoldása

D Azt mondjuk, hogy a rendezett $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ szám-n-es (vagy vektor) megoldása (megoldásvektora) a (*) ersz-nek, ha megoldása minden egyenletnek (minden egyenletet kielégít az $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$,..., $x_n = u_n$ helyettesítés). Az összes megoldás halmaza a megoldáshalmaz. Egy ersz konzisztens (vagy megoldható), ha megoldáshalmaza nem üres. Ellenkező esetben az ersz inkonzisztens (nem megoldható).

m Túlhatározott, ha az egyenletek száma nagyobb az ismeretlenekénél, és alulhatározott, ha kisebb.

P Tekintsük az alábbi három egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Mindháromnak $(x, y) = (2, 1)$ az egyetlen megoldása.

Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek

D Azonos ismeretlenekkel felírt két egyenletrendszert ekvivalensnek nevezünk, ha megoldásaik halmaza azonos.

T **Ekvivalens átalakítások**

Egyenletrendszert ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:

1. *két egyenlet felcserélése;*
2. *egy egyenlet nem nulla számmal való szorzása;*
3. *egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.*
4. *egy* $0 = 0$ *alakú egyenlet elhagyása (csökkenti az egyenletek számát!)*

Mátrixok

- Fejléc nélküli táblázat: mátrix (elemei azonos algebrai struktúrából valók).
- Általános alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}, \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]$$

- az első index jelöli a sor, a második az oszlop számát
- Az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorára az $(\mathbf{A})_{i*}$, j-edik oszlopára az $\mathbf{a}_j$ vagy az $(\mathbf{A})_{*j}$, elemére az $(\mathbf{A})_{ij}$ jelölés is használatos.

Egyenletrendszer együtthatómátrixa és (bővített) mátrixa

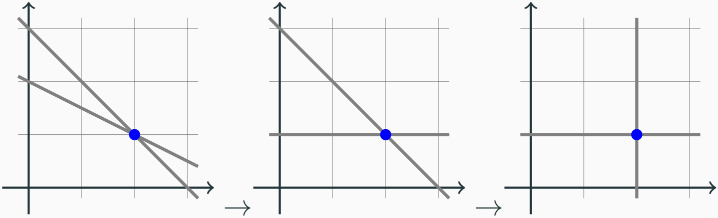
D egyenletrendszer *együtthatómátrixa* az egyenletek együtthatóit, míg *mátrixa* (*bővített* mátrixa) az egyenletek együtthatóit és konstans tagjait tartalmazza.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Sormodell 2 ismeretlennel: egyenesek metszete

P Egy egyenletrendszer és megoldása:

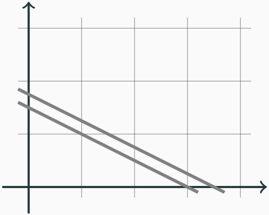
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

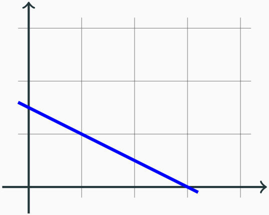


Sormodell 2 ismeretlennel: egyenesek metszete

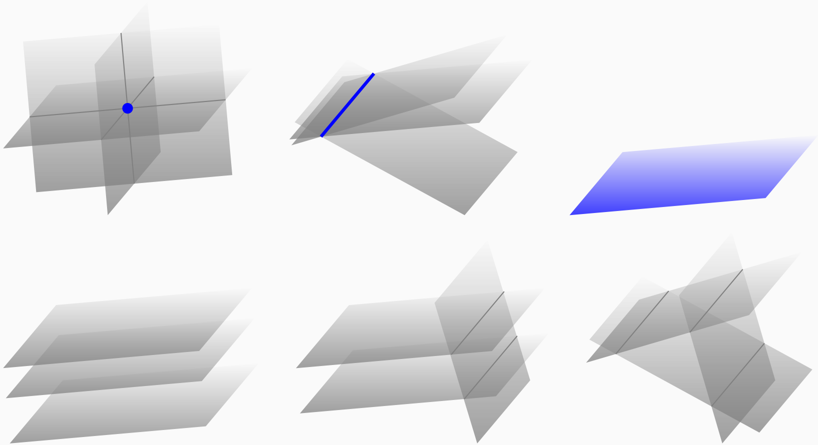
P Két másik egyenlet:

$$x + 2y = 3 \qquad x + 2y = 3$$
$$2x + 4y = 7 \qquad 2x + 4y = 6$$





Sormodell 3 ismeretlennel: síkok metszete



Sormodell: hipersíkok metszete

Á **Sormodell: hipersíkok metszete**

Ha egy $\mathbb{F}$ fölötti n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer m olyan egyenletből áll, melyek egyikének bal oldalán sem 0 minden együttható, akkor az egyenletrendszer megoldása a nekik megfelelő m hipersík közös része $\mathbb{F}^n$-ben.

- Az i-edik egyenlet:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

- Skalárszorzat alakban:

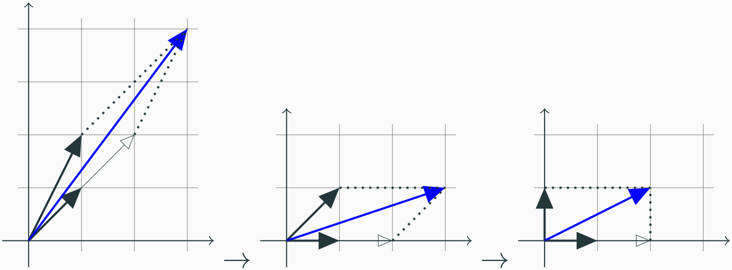
$$\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i.$$

- Homogén esetben: $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0$, azaz a megoldásvektor merőleges az $\mathbf{a}_{i*}$ vektorok mindegyikére.

Oszlopmodell, 2 egyenlet: síkvektorok lineáris kombinációja

P Egy egyenletrendszer és megoldása:

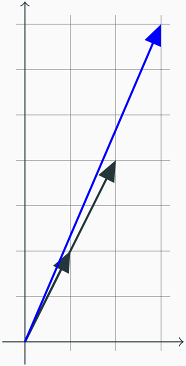
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

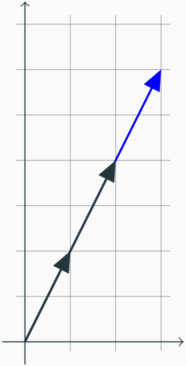


Oszlopmodell, 2 egyenlet: síkvektorok lineáris kombinációja

P Két másik egyenlet:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$





Oszlopmodell: vektorok lineáris kombinációja

Á **Oszlopmodell**

A (*) egyenletrendszer a következő vektoregyenlettel ekvivalens:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

- E modell szerint egy egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha az együtthatómátrix oszlopvektorainak összes lineáris kombinációjából álló halmazban a konstans tagokból álló vektor is szerepel.

Lineáris egyenletrendszerek

Megoldás kiküszöböléssel

Elemi sorműveletek

- Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket elemi sorműveleteknek nevezzük:
    - Sorcsere: két sor cseréje ($S_i \leftrightarrow S_j$: az i-edik és a j-edik sorok cseréje.)
    - Beszorzás: egy sor beszorzása egy nemnulla számmal (cS_i: az i-edik sor beszorzása c-vel)
    - Hozzáadás: egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása ($S_i + cS_j$: a j-edik sor c-szeresének az i-edik sorhoz adása).
- Hasonlóan definiálhatók az elemi oszlopműveletek ($O_i \leftrightarrow O_j$, cO_i, $O_i + cO_j$).

D

Lépcsős alak

Egy mátrix (sor)lépcsős alakú, ha kielégíti a következő két feltételt:

- a csupa 0-ból álló sorok (ha egyáltalán vannak) a mátrix utolsó sorai;
- bármely két egymás után következő nem-0 sorban az alsó sor elején (legalább eggyel) több 0 van, mint a fölötte lévő sor elején.

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemét főelemnek, vezérelemnek vagy pivotelemnek hívjuk. Egy főelem oszlopának főoszlop vagy bázisoszlop a neve.

Gauss-módszer

- A következő mátrixok lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- A Gauss-módszer, -kiküszöbölés vagy -elimináció: lineáris egyenletrendszer megoldása lépcsős alakra hozással (oszloponként haladva).

Gauss-módszer – egy megoldás

- Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 3y + 3z &= 4 \\ x + 2y + z &= 5 \end{aligned} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[S_4-S_1]{\substack{S_2-2S_1 \\ S_3-S_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{S_4-\frac{1}{2}S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{S_4-\frac{3}{2}S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2y + z &= 4 \\ -z &= 2 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 3 \\ z &= -2 \end{aligned} \rightarrow (x, y, z) = (1, 3, -2)$$

Gauss-módszer – végtelen sok megoldás

- Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[S_3-3S_1]{S_2-S_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3-2S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ 2x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

- Kötött változók: x_1 és x_3, szabad változók: x_2, x_4, x_5, értékük tetszőleges: pl. $x_2 = s, x_4 = t, x_5 = u$.
- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u)$.

Gauss-módszer – végtelen sok megoldás

- Írjuk fel oszlopok lineáris kombinációjaként!

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

F Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= 1 \\ 2x + 4y + 5z + 6w &= 3 \\ x + 2y + z \phantom{{}+ 4w} &= 3 \end{aligned}$$

Gauss-módszer – homogén lineáris egyenletrendszer

- Oldjuk meg az előző ersz-hez tartozó homogén ersz-t.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lépcsős alakra hozás

T **Lépcsős alakra hozás**

Bármely valós (vagy bármely test feletti) mátrix elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozható.

B Az algoritmus:

1. nulloszlop letakarása
2. sorcsere után $a_{11} \neq 0$
3. $S_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} S_1$ után a_{11} alatt minden elem 0.
4. takarjuk le az első oszlopot és az első sort, és ha nincs több sor, VÉGE, ha van, menjünk az 1. pontra.

Redukált lépcsős alak (rref)

D Egy mátrix redukált lépcsős, ha
1. lépcsős alakú;
2. minden főelem egyenlő 1-gyel;
3. minden főelem oszlopában a főelemen kívüli elemek 0-k;

- Vezéregyes
- A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Algoritmus: oszloponként haladva először *a vezérelemek alatt*, majd utána az *utolsó oszloptól kezdve fölöttük* eliminálunk!

Redukált lépcsős alakra hozás

P Hozzuk redukált lépcsős alakra az $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixot!

M1 $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_1-3S_2]{S_3+4S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M2 $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_1-S_2]{\frac{1}{2}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gauss–Jordan-módszer

- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\dots} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-S_3]{1/2 S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1-2S_3]{S_2-\frac{1}{2}S_3}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1-S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 3 \\ z &= -2 \end{aligned}$$
- Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $(x, y, z) = (1, 3, -2)$.

Gauss–Jordan-módszer – végtelen sok megoldás

- $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1 - S_2]{1/2 S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad + \frac{3}{2}x_4 + x_5 &= \frac{3}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 \qquad &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u),$
- $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A redukált lépcsős alak egyértelműsége

T **A redukált lépcsős alak egyértelmű**

Egy test elemeiből képzett minden mátrix redukált lépcsős alakra hozható. Ez az alak egyértelmű.

B Indirekt: $\mathbf{R}$ és $\mathbf{S}$ két redukált lépcsős alak. Válasszuk ki az első oszlopot, melyben különböznek, és az összes megelőző bázisoszlopot:

$$\hat{\mathbf{R}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{R}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A redukált lépcsős alak egyértelműsége 2.

$$\hat{S} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \hat{S} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right]$$

- Mivel oszlopok kihagyása nem változtat a sorekvivalencián, ezért az $\hat{R}$ és $\hat{S}$ mátrixok ekvivalensek, azaz a hozzájuk tartozó két egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása
- $\rightsquigarrow$ vagy minden $i = 1, \dots, k$ indexre $r_i = s_i$, vagy egyik egyenletrendszer sem oldható meg, tehát $\hat{R} = \hat{S}$, ellentmondás.

m **rref**(A) az a függvény, mely egy $m \times n$-es mátrixhoz a redukált lépcsős alakjából a zérussorok elhagyásával kapott mátrixot rendeli.

Szimultán egyenletrendszerek

- $$\begin{aligned} x+\ \ y+\ \ z&=3 \qquad & u+\ \ v+\ \ w&=3 \qquad & r+\ \ s+\ \ t&=0\\ 2x+3y+2z&=7 & 2u+3v+2w&=7 & 2r+3s+2t&=0\\ 2x+2y+3z&=6 & 2u+2v+3w&=7 & 2r+2s+3t&=1 \end{aligned}$$

- $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{S_2-2S_1\\ S_3-2S_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{S_1-S_2\\ S_1-S_3}}$$

  $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

- Ebből leolvasható mindhárom egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u\\ v\\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r\\ s\\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}.$$