12. Házi feladat (határidő: 2016-12-05)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát és inverzét aldeterminánsok segítségével:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Cramer szabály alkalmazásával oldjuk meg az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ha $\mathbf{A}$ az előző feladatbeli mátrix, $\mathbf{b} = [1\ 0\ -1\ 0]^T$.

3. Oldjuk meg az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ és az $\mathbf{x}^T\mathbf{A} = \mathbf{b}^T$ egyenletrendszert $\mathbf{A}^{-1}$-vel való beszorzással az előző feladatbeli $\mathbf{A}$-val és $\mathbf{b}$-vel.

4. Határozzuk meg az alábbi mátrix determinánsát:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg az alábbi $2n \times 2n$-es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \mathbf{X} \end{bmatrix}$$

blokkmátrix determinánsát és inverzét, ahol $\mathbf{I}, \mathbf{O}, \mathbf{X} \in \mathrm{M}_n[\mathbb{R}]$, $\mathbf{O}$ a nullmátrix, $\mathbf{I}$ az egységmátrix, és $\mathbf{X}$ mellékátlójában -1-esek, egyebütt nullák állnak.

6. Határozzuk meg az alábbi két mátrix determinánsát (a nem zérus értékű) kígyók determinánsának összegére való bontással:

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Számítsuk ki az alábbi összeget!

$$\sum_{k=1}^{10} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ (-1)^k 2k & (-1)^k 3k & 2 \end{vmatrix}.$$

8. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját a maximális méretű nem nulla aldetermináns méretének meghatározásával:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Írjuk fel egy mátrixleképezés és egy eltolás kompozíciójaként az $\mathbb{R}^2$-nek azt az egybevágóságát, amely az $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(0,1)$ csúcsú háromszöget az $A'(5,3)$, $B'(5,1)$, $C'(4,3)$ csúcsú háromszögbe képezi!

10. Határozzuk meg az a, b, c, d valós számokat úgy, hogy az alábbi A mátrix ortogonális mátrix legyen! Lehet-e az A egy tükrözés mátrixa?

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ a & -2/3 & b \\ c & d & 2/3 \end{bmatrix}$$

*11. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

*12. Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix rangjától függően mennyi a rangja az adj $\mathbf{A}$ mátrixnak, azaz annak a mátrixnak, amelynek az (i,j) indexű helyén az $\mathbf{A}$ mátrix (i,j) indexű előjeles aldeterminánsa áll?