11. Házi feladat (határidő: 2016-11-28)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Legyen $\mathbb{R}^4$ standard bázisa $\mathcal{C}$, és egy alterének bázisa $\mathcal{B} = \{(1,0,1,-1),(1,1,0,0)\}$.

   (a) Írjuk fel az $\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ áttérési mátrixot!

   (b) Írjuk fel $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$-t ha $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

2. Elemi sorműveletek alkalmazásával számítsuk ki az alábbi determinánsokat!

   $$a)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

3. Határozzuk meg az elemi mátrixok determinánsát!

4. Legyen az 5×5-ös $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa 3, az 5×5-ös C mátrixé $c \neq 0$. Mi lesz a determinánsa a következő mátrixoknak: *a)* $2\mathbf{A}^{-1}$, *b)* $(2\mathbf{A})^{-1}$, *c)* $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}$, *d)* $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$.

5. Hogyan változik egy $n\times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa, ha az $\mathbf{A}$ mátrixot

   a) tükrözzük a vízszintes középvonalára;

   b) elforgatjuk $+90°$-kal?

6. Számítsuk ki a következő $n\times n$-es determináns értékét! (Ötlet: a második sort vonjuk ki az összes többiből.)

   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

7. Számítsuk ki a a Pascal-háromszögből képzett

   $$\left|\binom{i+j-2}{j-1}\right|_{n\times n} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}$$

   determináns értékét! (Útmutatás: az utolsó sorral kezdve mindegyik sorból vonjuk ki az előzőt!)

8. Számítsuk ki a

   $$\begin{vmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{vmatrix}$$

   determináns értékét! Hogyan lehet ezt általánosítani?

9. Hány inverzió van az alábbi permutációkban?

   a) $1,2,3,4$; *b)* $2,4,3,1$; *c)* $5,4,1,3,2,6$; *d)* $n,(n-1),\dots,1$; *e)* $1,3,\dots(2n-1),2,4,\dots 2n$.

   Írjuk fel az ezekhez tartozó permutáló mátrixokat és determinánsuk értékét!

10. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix PLU-felbontását és annak segítségével a determinánsát.

    $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

11* Legyen az $n\times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix invertálható. Mely $\mathbf{v}$ vektorokra igaz, hogy az $\mathbf{A}$ bármely sorához hozzáadhatjuk $\mathbf{v}$ alkalmas skalárszorosát úgy, hogy a mátrix determinánsa 0-vá váljon?

12* Legyen $\mathbf{A}$ az az $n\times n$-es mátrix $n \geq 7$-re, amelynek az (i,j) indexű eleme az ij szorzat n-nel vett legkisebb pozitív maradéka (tehát 0 helyett n-et írunk). Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{A}$ determinánsa 0.