6. Házi feladat (határidő: 2016-10-21)

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 10 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 8 pontot el kell érni! Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Határozzuk meg az $x^3 + 6x^2 + 6x - 13$ polinom gyökeit csak a Cardano-képlet segítségével!

2. Bontsuk fel a

$$2x^6 - x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x + 5$$

polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben!

3. Adjuk meg azt a legalacsonyabbfokú $p(x)$ polinomot, amelyre $k = 1, 2, 3, 4$ esetén $p(x_k) = y_k$:

x_k	-1	0	1	2
y_k	-10	-5	0	5

4. Legyen a, b, c az $x^3 - x^2 + 3z + 6$ polinom három gyöke $\mathbb{C}$-ben. Határozzuk meg a következő kifejezések értékét:

   (a) $a + b + c$

   (b) abc

   (c) $a^2 + b^2 + c^2$

5. *(a)* Mutassunk 3-adfokú $\mathbb{Z}[x]$-beli polinomot, amelynek nincs $\mathbb{Z}$-ben gyöke, de nem irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben.

   (b) Mutassunk $\mathbb{R}[x]$-beli negyedfokú polinomot, amelynek nincs $\mathbb{R}$-ben gyöke, de nem irreducibilis $\mathbb{R}[x]$-ben.

6. Fejezzük ki az $x^3 + y^3 + z^3$ polinomot x, y, z elemi szimmetrikus polinomjainak polinomjaként. Használjuk a főtag kiköszöbölési algoritmust.

7. *(a)* Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, és $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor $a - b \mid f(a) - f(b)$.

   (b) Keressünk olyan egész együtthatós polinomot, amelyre $\{f(-2), f(1), f(3)\} = \{2, 6, 11\}$ (nem feltétlenül ebben a sorrendben)!

8. Bontsuk fel az $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben!

9. Irreducibilis-e az $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 3$ polinom $\mathbb{R}$ fölött, $\mathbb{Q}$ fölött és $\mathbb{Z}_2$ fölött?

10. Határozzuk meg azokat a $c \in \mathbb{Z}$ számokat, amelyekre az $x^3 + 2x^2 + cx + 4$ polinomnak van racionális gyöke!

*11 Határozzuk meg azokat a $c \in \mathbb{Z}$ számokat, amelyekre az $x^3 + 2x^2 + cx + c$ polinomnak van racionális gyöke!

*12 Bizonyítsuk be, hogy ha

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

komplex együtthatós polinom, akkor gyökeinek abszolút értéke legfeljebb

$$1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|.$$