5. Házi feladat (határidő: 2016-10-14)

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 10 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 8 pontot el kell érni! Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Keressük meg az $2x^6-x^5-9x^4+4x^3-6x^2+5x+5$ polinom összes gyökét! Bontsuk fel e polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben!

2. Adjuk meg az alábbi polinomok gyöktényezős alakját! *(a)* x^n-1 *(b)* $x^{2n}-x^{2n-1}+...+x^2-x+1$

3. Adjuk meg azt a legalacsonyabbfokú egyfőegyütthatós

   (a) komplex együtthatós

   (b) valós együtthatós polinomot,

   melynek i kétszeres, 1 háromszoros gyöke!

4. Határozzuk meg az összes irreducibilis másod- és harmadfokú polinomot $\mathbb{Z}_2$ felett! Irreducibilisek-e ezek $\mathbb{Z}$ felett is?

5. Irreducibilis-e az x^3+3x+1 polinom $\mathbb{Q}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben, illetve $\mathbb{Z}_5[x]$-ben?

6. A Horner-séma alkalmazásával *(a)* osszuk el maradékosan a $p(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$ polinomot a $q(x)=x+1$ polinommal, és *(b)* írjuk át $p(x)$-et $x+1$ polinomjaként (azaz $x+1$ hatványaival)!

7. Határozzuk meg az a együtthatót úgy, hogy -1 legalább kétszeres gyöke legyen az x^5-ax^2-ax+1 polinomnak!

8. Mit ad maradékul a $3x^{21}-2x^{14}+5x^9-7$ polinom $(x-i)$-vel, $(x+i)$-vel, x^2+1-gyel illetve $(x-1)^3$-nel osztva?

9. Milyen feltételek mellett osztható az x^3+px+q polinom az x^2+rx-1 polinommal?

10. Határozzuk meg az $x^3-x^2-8x+12$ polinom gyökeit a Rolle-féle gyöktétel segítségével!

*11 Bizonyítsuk be, hogy az egész együtthatós $p(x)$ polinomnak nincs egész gyöke, ha $p(0)$ és $p(1)$ páratlan szám!

*12 Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges legalább másodfokú komplex $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ polinomhoz van olyan $c\in\mathbb{C}$ szám, hogy $f(x)+c$-nek létezzen többszörös gyöke $\mathbb{C}$-ben. Igaz-e ez $f(x)\in\mathbb{R}$-re $c\in\mathbb{R}$-rel?