4. Házi feladat (határidő: 2016-10-07)

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 10 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 8 pontot el kell érni! Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Határozzuk meg az

$$\frac{(1+2016i)^{2016}}{(1-2016i)^{2016}}$$

komplex szám abszolút értékét!

2. Mi a mértani helye a síkon azoknak a pontoknak, amelyeknek megfelelő z komplex számokra:

a) $|z-5+i|=2$

b) $|z-i|=|z+i|$

3. Adjuk meg *a)* a primitív 5-ödik *b)* a primitív 8-adik egységgyökök összegét és szorzatát!

4. Legyen $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ az n-edik egységgyökök halmaza egy adott $n \geq 1$ egészre. Számítsuk ki a

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^k,$$

összeget, ahol $k \in \mathbb{N}_0$.

5. Igazoljuk, hogy tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}^+$ egészekre

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \ldots + \binom{k+n}{n} = \binom{k+n+1}{k+1}.$$

6. Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2x^2 + 4$ polinomot *a)* $x+1$-gyel *b)* $(x+1)^2$-nel *c)* (x^2-1)-gyel!

7. Oldjuk meg az $z^6 - z^3 + 1 - i = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán!

8. Határozzuk meg $x^n - 1$ és $x^k - 1$ közös gyökeit! Mutassuk meg, hogy az ezekhez tartozó gyöktényezők szorzata $x^d - 1$, ahol $d = (n, k)$!

9. Határozzuk meg a $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 2$ és $q(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ polinomok *a)* legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmussal és *b)* kibővített euklideszi algoritmussal adjunk meg olyan $\alpha(x)$ és $\beta(x)$ polinomot, hogy $\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x) = (p(x), q(x))$ legyen.

10. Ellenőrizzük, hogy a rendezett valós számpárokon a komplex szorzásnak megfelelő

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

művelet valóban asszociatív.

*11 Mutassuk meg, hogy ha $(k, n) = 1$, akkor egy primitív k-adik és egy primitív n-edik egységgyök szorzata primitív kn-edik egységgyök.

Mutassuk meg, hogy minden primitív kn-edik egységgyök előáll egy primitív k-adik és egy primitív n-edik egységyök szorzataként ha $(k, n) = 1$, és ez az előállítás egyételmű.

*12 Legyen ε egy n-edik egységgyök. Számítsuk ki az $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^{n-1}$ összeget.

*13 Igazoljuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$