

### 3. Házi feladat (határidő: 2016-09-30)

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 10 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 8 pontot el kell érni! Más megoldását lemasolni nem szabad!

1. Oldjuk meg a következő lineáris kongruenciákat!

(a)  $4x \equiv 6 \pmod{14}$ ,

(b)  $4x \equiv 6 \pmod{16}$ ,

(c)  $4x \equiv 8 \pmod{16}$ .

2. Számítsuk ki  $3^{-1} \pmod{13}$ ,  $3^{-1} \pmod{26}$  és  $3^{-1} \pmod{52}$  értékét!

3. Készítsük el (a) a modulo 12 összeadás és szorzás művelet tábláját, (b) a 12-höz relatív prímekek modulo 12 szorzástábláját és (c) a 8-hoz relatív prímekek modulo 8 szorzástábláját!

4. Oldjuk meg az

$$x \equiv 1 \pmod{3}$$

$$x \equiv 1 \pmod{4}$$

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

kongruenciarendszert!

5. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a

$$z^2 + 2iz - 1 + i = 0$$

egyenletet!

6. Számítsuk ki az  $1 - 2i$  komplex szám négyzetgyökeit (trigonometrikus alak használata nélkül)!

7. Számítsuk ki  $-243i$  összes ötödik gyökét trigonometrikus alakban!

8. Adjuk meg  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényként (a szokásos algebrai műveletek és a konjugálás segítségével) az alábbi síktranszformációt:  $1 + i$  körüli  $60^\circ$ -os forgatás!

9. Adjuk meg annak a négyzetnek a másik két csúcsát, melynek két átellenes csúcsát két adott komplex szám  $z_1$  és  $z_2$  alkotják!

10. Mutassuk meg, hogy egy  $R$  gyűrűben  $0a = 0$  és  $(-a)b = -(ab)$ .

\*11 Legyenek  $a$  és  $n$  egyménél nagyobb egészek. Mutassuk meg, hogy ha  $a^n + 1$  prím, akkor  $n$  kettőshatvány!

\*12 Mutassuk meg, hogy az

$$x \equiv a \pmod{m}$$

$$x \equiv b \pmod{n}$$

kongruenciarendszer pontosan akkor oldható meg, ha  $(m, n) \mid (a - b)$ . Ha a rendszer megoldható, a megoldás egyértelmű modulo  $[m, n]$ .

\*13 Mutassuk meg, hogy ha  $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha$ , akkor

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\alpha,$$

ahol  $z \in \mathbb{C}$  és  $n \in \mathbb{Z}$ .