BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Bevezetés az algebrába 1

BMETE92AX23

Komplex számok

H406 – 2017-09-25,27,29

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

A komplex számok rövid története

A komplex számok rövid története

A számfogalom bővülése

- pozitív egészek – összeadás, szorzás
- $a + x = b$ megoldhatósága $\to$ negatív számok és 0
- $ax = b$ megoldhatósága $\to$ racionális számok
- $x^2 = 2$ megoldása $\to$ vannak nem racionális számok is
- sorozatok határértékének fogalma $\to$ irracionális számok
- racionális + irracionális számok $\to$ valós számok
- az $x^2 = -1$ egyenlet megoldásával lesz további bővítés???

D AMH az F test algebrailag zárt, ha bármely nem konstans F-beli együtthatós polinomnak van F-ben zérushelye.

P $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ tehát nem zárt, mert $x^2 + 1$-nek nincs zérushelye e testekben, de nem zárt pl. $\mathbb{Z}_5$ sem, mert az $x^2 + 2$ polinomnak $\mathbb{Z}_5$-ben nincs zérushelye.

T (Ernst Steinitz, 1910) Minden F test beágyazható algebrailag zárt testbe, melyek közt létezik legszűkebb, ami F-et fixenhagyó izomorfia erejéig egyértelmű.

A komplex számok rövid története

Egy kis történelem

- Girolamo Cardano (1501–1576) orvos, filozófus, matematikus – 1538 körül értesül arról, hogy Scipione del Ferro és Niccolò Tartaglia egymástól függetlenül felfedezték az $x^3 + px = q$ alakú harmadfokú egyenlet megoldását – 1545-ben megírja „Ars magna sive de regulis algebraicis” című művét, benne a megoldóképlettel – 1552-től kezdődően Európa egyik leghíresebb orvosa – a 60-as évek elején elveszti két fiát (gyilkosságért halál, rablásért száműzetés) – 1570-ben Bolognában bebörtönzik, szabadulása után Rómába költözik
- Scipione del Ferro (1465–1526) felfedezi a harmadfokú egyenlet megoldásának módját – titokban tartja (kivétel Nave, Fiore)

- Niccolò Fontana (1499–1557) gúnynevén Tartaglia (dadogó) (1511 Brescia, francia dúlás) – 1535: Fiore kihívja Tartagliát egy 15 napos versenyre (30 feladat, a vesztes a győztest és 29 barátját megvendégeli) – felkészüléskor Tartaglia rájön a nehezebb típusú harmadfokú egyenletek megoldási módjára
- Cardano (kilátásba helyezve Tartaglia tüzérségi találmányainak pártfogót keres, titoktartás igérete mellett megszerzi a titkot) – amikor Navétól megtudja, hogy del Ferro is ismerte e képleteket, felmentve érzi magát, és publikálja (a negyedfokú esetre is továbbfejlesztve az eredményt)
- Tartaglia leírta „megcsalatásának” történetét
- Milánóban Ferrari (Cardano tanítványa) vitára hívja Tartagliát, aki a vitát elveszti, ennek következtében lehetőségeit (nyilvános előadások) elveszíti

A komplex számok rövid története

A megoldóképlet egy speciális esetre

Oldjuk meg az $x^3 = bx + c$ egyenletet!

A Tartaglia által talált képlet (ennél később precízebb formában fogjuk tanulni):

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

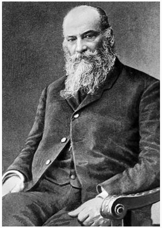
Oldjuk meg a $x^3 = 7x + 6$ egyenletet!

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{\frac{6}{2} + \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{6}{2} - \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt[3]{81 + 30\sqrt{-3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{81 - 30\sqrt{-3}} \\
&= \frac{1}{3}\left(9/2 + 1/2\sqrt{-3}\right) + \frac{1}{3}\left(9/2 - 1/2\sqrt{-3}\right) \\
&= 3
\end{aligned}$$

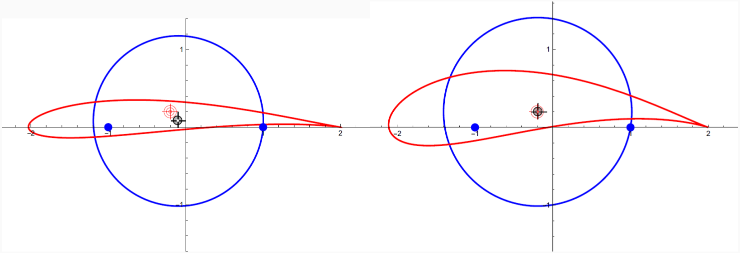
A komplex számok rövid története

Alkalmazások

hidrodinamika, áramlások vizsgálata, Zsukovszkij-féle szárnyprofil (Joukowski / Zhukovskii / Zhukovsky Airfoil, Nikolay Yegorovich Zhukovsky, Николáй Егóрович Жукóвский)

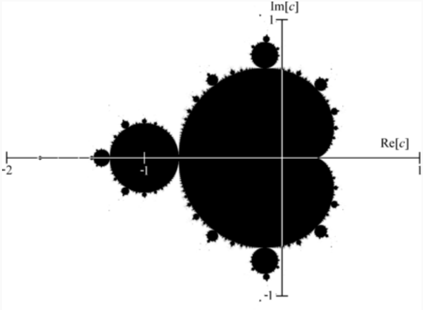


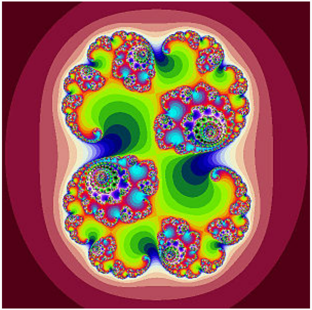
- $z \mapsto z + \dfrac{1}{z}$:

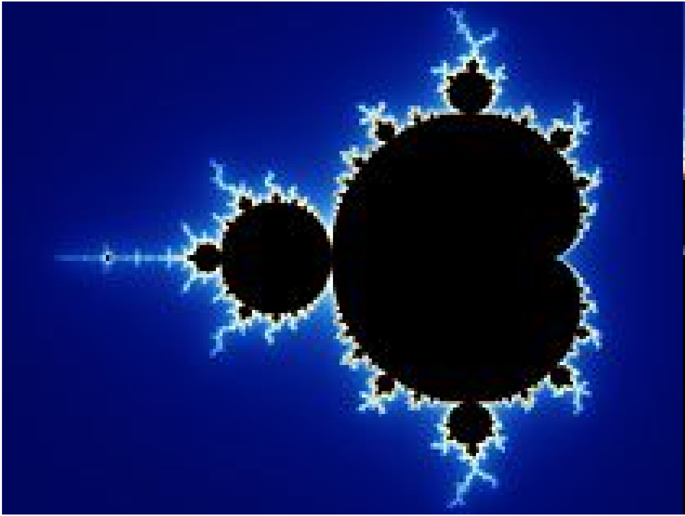
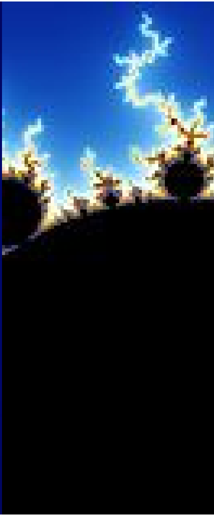


- Egy „Wolfram demonstration” animáció.

- elektromosságtan, jelfeldolgozás, villamosmérnöki tudományok
- lineáris rendszerek, lineáris differenciálegyenletek megoldása
- relativitáselmélet, kvantummechanika
- fraktálok (Mandelbrot-halmazok: ahol a $z_0 = c$, $z_n = z_{n-1}^2 + c$ sorozat korlátos; Julia-halmazok)





Számolás komplex számokkal

Számolás komplex számokkal

Komplex számok

D

komplex szám algebrai alakja

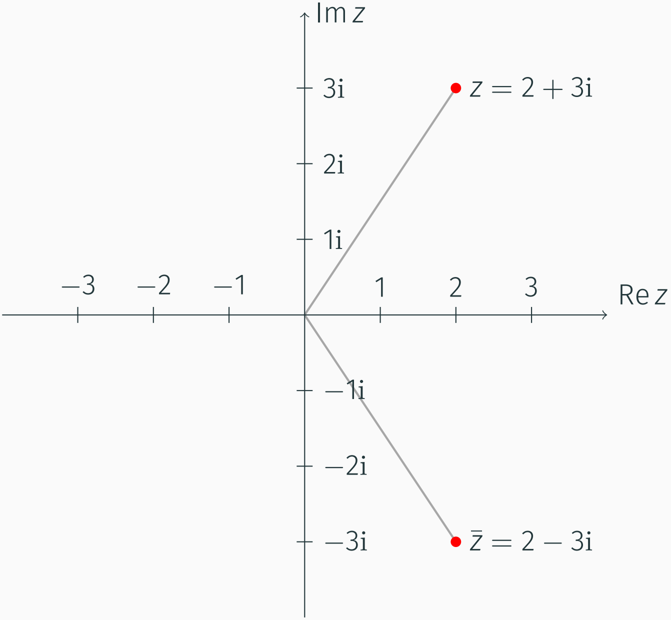
A $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ alakú kifejezéseket komplex számoknak nevezzük, ahol i az a szám, melyre $\mathrm{i}^2 = -1$ (imaginárius egység: imaginárius = nem valódi). A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$ jelöli.

Egy komplex szám több alakban is felírható, ezt az alakot algebrai alaknak nevezzük. Az a szám a z valós része, a b az imaginárius, jelölése: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ (más szokásos jelölés: $a = \Re(z)$, $b = \Im(z)$).

D

konjugált

$\bar{z} = a - \mathrm{i}b$, ahol $z = a + \mathrm{i}b$



Im z
3i
2i
1i
−1i
−2i
−3i
−3
−2
−1
1
2
3
Re z
z = 2 + 3i
z̄ = 2 − 3i

D

Definíció

Az (a, b) vektor x-tengellyel bezárt szöge legyen φ, hossza r. Ekkor a $z = a + ib$ komplex szám felírható $r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ alakban is, hisz $a = r\cos\varphi$, és $b = r\sin\varphi$. Ezt az alakot trigonometriai alaknak, az r nemnegatív valóst a komplex szám abszolút értékének, φ-t irányszögének, arkuszának vagy argumentumának nevezzük: $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

T

Tétel

A komplex számok algebrai alakja egyértelmű.

Bizonyítás.

$a + b\mathrm{i} = c + d\mathrm{i} \rightsquigarrow a - c = (d - b)\mathrm{i}$.

$b \neq d \rightsquigarrow \frac{a-c}{d-b} = \mathrm{i}$ ellentmondás;

$b = d \rightsquigarrow a - c = 0 \rightsquigarrow a = c$. $\square$

T

Kapcsolat az algebrai és trigonometriai alak között

Ha $z = a + bi = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, akkor

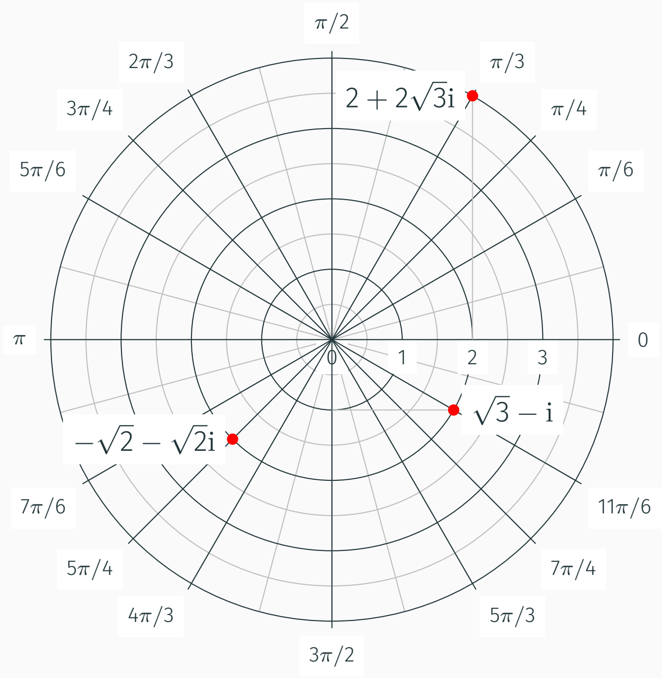
$$a = r\cos\varphi$$

$$b = r\sin\varphi$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}, (z\bar{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2)$$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\frac{b}{a}) & \text{ha } a > 0 \\ \operatorname{arctg}(\frac{b}{a}) + \pi & \text{ha } a < 0 \text{ és } b \geq 0 \\ \operatorname{arctg}(\frac{b}{a}) - \pi & \text{ha } a < 0 \text{ és } b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b < 0 \\ \text{határozatlan} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b = 0 \end{cases}$$

ahol $\varphi \in (-\pi, \pi]$.


π/2
2π/3
π/3
3π/4
π/4
5π/6
π/6
π
0
$2+2\sqrt{3}i$
0
1
2
3
$\sqrt{3}-i$
$-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$
7π/6
11π/6
5π/4
7π/4
4π/3
5π/3
3π/2

Számolás komplex számokkal

Műveletek algebrai alakkal

Példa

$$(2+3\mathrm{i})-(3-\mathrm{i}),\ (2+3\mathrm{i})(3-\mathrm{i}),\ \frac{1}{\mathrm{i}},\ \frac{2+3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}},\ \sqrt{-5+12\mathrm{i}}$$

M $(2+3\mathrm{i})-(3-\mathrm{i}) = \ -1+4\mathrm{i}$

$(2+3\mathrm{i})(3-\mathrm{i}) = 2\cdot 3 + 3\mathrm{i}(-\mathrm{i}) + (3\mathrm{i})\cdot 3 + 2\cdot(-\mathrm{i}) = 9+7\mathrm{i}$

$\frac{1}{\mathrm{i}} = \ -\mathrm{i}$

$\frac{2+3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} = \frac{(2+3\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})} = \frac{9+7\mathrm{i}}{10} = \frac{9}{10} + \frac{7}{10}\mathrm{i}$

$\sqrt{-5+12\mathrm{i}} = a+b\mathrm{i} \rightsquigarrow -5+12\mathrm{i} = a^2-b^2+2ab\mathrm{i} \rightsquigarrow$
$a^2-b^2=-5$, $ab=6$, azaz $b=6/a \rightsquigarrow a^4+5a^2-36 \rightsquigarrow a^2=4$
(vagy $a^2=-9$, ez hamis gyök) $\rightsquigarrow a=\pm 2$, $b=\pm 3 \rightsquigarrow \sqrt{-5+12\mathrm{i}}$
két értéke $2+3\mathrm{i}$ és $-2-3\mathrm{i}$.

Példa (Alapműveletek algebrai alakkal)

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$$

Alapműveletek algebrai alakban: összeadás, kivonás, szorzás algebrai kifejezésként az $\mathrm{i}^2=-1$ helyettesítést használva; osztás a nevező konjugáltjával való bővítéssel.

T

Tétel

$\mathbb{C}$ test

T

Konjugált tulajdonságai

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$
4. $\bar{\bar{z}} = z$

Számolás komplex számokkal

Műveletek trigonometriai alakkal

Példa

$[2(cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})][\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}] =$
$2cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{7\pi}{6} - 2\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{7\pi}{6} + 2[cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{7\pi}{6}]\mathrm{i} =$
$2\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}) + 2\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6})\mathrm{i} = 2\cos\frac{3\pi}{2} + 2\sin\frac{3\pi}{2}\mathrm{i} = -2\mathrm{i}.$

Ellenőrzés:
$(1 + \sqrt{3}\mathrm{i})(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}^2 - \frac{\mathrm{i}}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = -2\mathrm{i}.$

- K Mi a geometriai jelentése az *i*-vel való szorzásnak?
- K Mi a geometriai jelentése a $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ számmal való szorzásnak?
- K Milyen komplex algebrai művelettel valósítható meg a $z \in \mathbb{C}$ Gauss-síkon ábrázolt képének a $w \in \mathbb{C}$ körül φ szöggel való elforgatása?

Á

Szorzás, osztás trigonometriai alakban

Legyen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$. Ekkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

B A szögek összegére vonatkozó trigonometriai azonosságokkal:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \\ &\quad \mathrm{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Az osztásra hasonlóan.

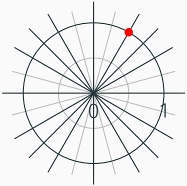
T

Abszolút érték tulajdonságai

1. $|\bar{z}| = |z|$
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
3. $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (háromszög-egyenlőtlenség)

Számolás komplex számokkal

Hatványozás, gyökvonás



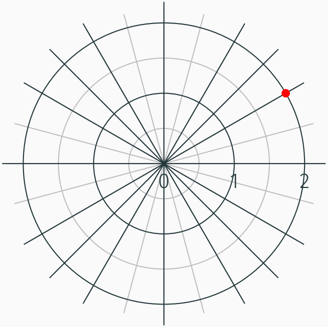
Példa

Számítsuk ki

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{100}$$

értékét!

M $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ trigonometriai alakja: $\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$.
$[\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}]^{100}=\cos\frac{100\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{100\pi}{3}=\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}=$
$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.



Példa

Számítsuk ki

$$\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^9$$

értékét!

M $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ hossza $\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$, trigonometriai alakja:
$2(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})$.
$[2(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})]^9 = 2^9(\cos\frac{9\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{6}) =$
$512(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}) = -512\mathrm{i}$

P Határozzuk meg az összes olyan komplex számot, melynek hatodik hatványa 1. (Számítsuk ki az 1 hatodik gyökeit!)

M Az 1 trigonometriai alakja $1 = 1(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$. Olyan számokat keresünk, melyek 6-odik hatványa 1, azaz olyanokat, melyekre $r^6(\cos 6\varphi + \mathrm{i}\sin 6\varphi) = 1(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$. Innen $r = 1$, és $6\varphi = 0$, de mivel 0 ugyanaz a szög, mint 2π, 4π..., ezért $6\varphi = 2\pi$, $6\varphi = 4\pi$,...$6\varphi = 10\pi$ is lehet! ($6\varphi = 12\pi$, $6\varphi = 14\pi$,... nem ad új eredményt!) Így $\varphi = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$. A gyökök:

$1(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) = 1$,
$1(\cos \pi/3 + \mathrm{i}\sin \pi/3) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,
$1(\cos 2\pi/3 + \mathrm{i}\sin 2\pi/3) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,
$1(\cos \pi + \mathrm{i}\sin \pi) = -1$,
$1(\cos 4\pi/3 + \mathrm{i}\sin 4\pi/3) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,
$1(\cos 5\pi/3 + \mathrm{i}\sin 5\pi/3) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

D Ha $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}$, azaz a z komplex szám komplex n-edik gyökén azon w számok halmazát értjük, melyekre $w^n = z$. (Ez különbözik a valós n-edik gyök fogalmától!)

Á (Hatványozás, gyökvonás trigonometriai alakban) Legyen $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Ekkor

$$z^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi)) = r^{-1}(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)$$

$$z^n = (r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \; n \in \mathbb{N}^+, \; k = 0, \ldots, n-1,$$

ahol $\sqrt[n]{}$ a komplex, $\sqrt[n]{}$ a valós n-edik gyökvonás művelete, és k végigfuthat bármely más mod n teljes maradékrendszer minden elemén.

B L $w = R(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$, $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$

$w^n = z \rightsquigarrow R^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \rightsquigarrow$

$R = \sqrt[n]{r}$, $n\alpha = \varphi + 2k\pi \rightsquigarrow \alpha = \frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi)$

Ha $\frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi)$ és $\frac{1}{n}(\varphi + 2\ell\pi)$ azonos szögek, akkor $(\frac{k}{n} - \frac{\ell}{n})2\pi$ a 2π egész számú többszöröse $\rightsquigarrow \frac{k}{n} - \frac{\ell}{n}$ egész $\rightsquigarrow k \equiv \ell \pmod{n}$.

Számolás komplex számokkal

Egységgyökök

D Az $\varepsilon \in \mathbb{C}$ n-edik egységgyök ($n \in \mathbb{N}^+$), ha $\varepsilon^n = 1$.

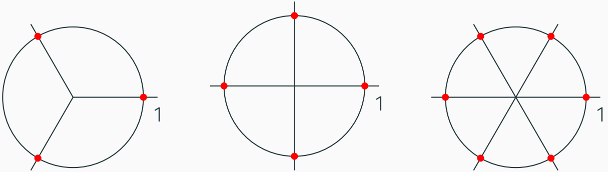
m $\cos(k\frac{2\pi}{n}) + i\sin(k\frac{2\pi}{n})$

2-dik egységgyökök: $1, -1$.

3-dik egységgyökök: $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

4-dik egységgyökök: $1, i, -1, -i$.

6-dik egységgyökök: $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.



A második egységgyökök egyúttal negyedik és hatodik, a harmadik egységgyökök egyúttal hatodik egységgyökök is.

Példa (Gyökvonás egységgyökkel való szorzással)

$\sqrt[5]{1+i\sqrt{3}}$

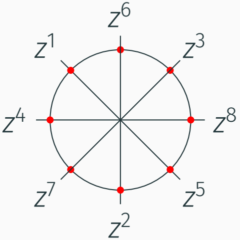
M $z = 1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ (mivel $\rightsquigarrow |z| = 2$, $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$).
Az összes gyök meghatározásához elegendő egy gyök kiszámítása, és annak megszorzása az 5-ödik egységgyökökkel (miért?).
Egy gyök: $\sqrt[5]{2}(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15})$
Az összes gyök: $\sqrt[5]{2}(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15})(\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5})$, ahol $k = 0, 1, \ldots, 4$.
Azaz $\sqrt[5]{2}(\cos(\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5})$, $k = 0, 1, \ldots, 4$.

D $\varepsilon \in \mathbb{C}$ (multiplikatív) rendje az a legkisebb $n \in \mathbb{N}^+$, melyre $\varepsilon^n = 1$. Ha ilyen n nincs, akkor ε rendje ∞.
ε primitív n-edik egységgyök, ha rendje n.

P Mennyi $-1 + i$ és $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ rendje?

M $-1 + i$ rendje ∞, mivel $|-1 + i| > 1$.

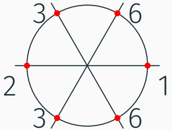
$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})$
$\rightsquigarrow$ a rendje 8.



K Igaz-e, hogy minden 1 abszolút értékű komplex szám egységgyök?

M Nem, ha $\alpha = 2\pi a$, ahol a irracionális, akkor nincs olyan $n, k \in \mathbb{N}^+$, hogy $2\pi an = 2\pi k$.

P A 6-odik egységgyökök primitív hanyadik egységgyökök? És melyik primitív 6-odik egységgyök?



Tehát a primitív hatodik egységgyökök $\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ és $\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Á Minden n-edik egységgyök rendje osztója n-nek.

B $\varepsilon^n = 1 \rightsquigarrow \varepsilon$ rendje véges. Ha ez $k < n$, akkor $n = kq + r$ $(r < k)$.
$1 = \varepsilon^n = \varepsilon^{kq+r} = (\varepsilon^k)^q\varepsilon^r = 1^q\varepsilon^r = \varepsilon^r \rightsquigarrow r = 0 \rightsquigarrow k \mid n$.

Á $\varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha$ egységgyök $\iff$ $\alpha = 2\pi r$, ahol $r \in \mathbb{Q}$.
ε rendje n $\iff$ r egyszerűsített alakjának nevezője n.

B $\varepsilon^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = 1 = \cos 0 + i\sin 0 \iff n\alpha = 2k\pi$ vmely $k \in \mathbb{Z}$-re $\iff \alpha = 2\pi\frac{k}{n}$

- Ha $\frac{k}{n}$ egyszerűsíthető, akkor n-nél kisebb hatvány is 1.
- Ha nem egyszerűsíthető, azaz $(k, n) = 1$, akkor $\varepsilon^m = 1$ esetén $m\alpha = 2\pi m\frac{k}{n} \rightsquigarrow m \cdot \frac{k}{n} \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow n \mid mk \rightsquigarrow n \mid m \rightsquigarrow$ a rend n.

T L ε primitív n-edik egységgyök. Ekkor

1. az n-edik egységgyökök: $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$,
2. a primitív n-edik egységgyökök: $\{\varepsilon^\ell : 1 \leqslant \ell \leqslant n,\ (\ell, n) = 1\}$, és ezek száma $\varphi(n)$.

B 1: az $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ mindegyike n-edik egységgyök, másrészt mind különböző, mert $\varepsilon^k = \varepsilon^j$ és $k \geqslant j$ esetén $\varepsilon^{k-j} = 1$, $0 \leqslant k - j \leqslant n-1 \rightsquigarrow k = j$.

- 2: $\arg(\varepsilon) = 2\pi\frac{k}{n}$, $(k, n) = 1 \rightsquigarrow \arg(\varepsilon^\ell) = 2\pi\frac{\ell k}{n} \rightsquigarrow$ $\frac{\ell k}{n}$ nem egyszerűsíthető $\iff (\ell, n) = 1$.

T ε pontosan akkor primitív n-edik egységgyök, ha minden n-edik egységgyök előáll hatványaként.

T $\displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

B Minden n-edik egységgyök primitív d-edik egységgyök vmely $d \mid n$-re. Minden d-edik primitív egységgyök n-edik egységgyök, ha $d \mid n$, és ezek száma $\varphi(d)$.

P Mennyi az n-edik egységgyökök összege és szorzata?

M $1 + \varepsilon + \ldots + \varepsilon^{n-1} = \dfrac{\varepsilon^n - 1}{\varepsilon - 1} = \dfrac{1-1}{\varepsilon - 1} = 0$, ha $n > 1$
és az összeg $= 1$, ha $n = 1$.

\- $1 \cdot \varepsilon \cdot \ldots \cdot \varepsilon^{n-1} = \varepsilon^{\frac{n(n-1)}{2}}$
$2 \nmid n$: $(\varepsilon^n)^{\frac{n-1}{2}} = 1$
$2 \mid n$: $(\varepsilon^{\frac{n}{2}})^{n-1} = (-1)^{n-1} = -1$, mert $(\varepsilon^{\frac{n}{2}})^2 = 1$, de $\varepsilon^{\frac{n}{2}} \neq 1 \rightsquigarrow$ $\varepsilon^{\frac{n}{2}} = -1$.

\- Tehát $1 + \varepsilon + \ldots + \varepsilon^{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{ha } n > 1, \\ 1, & \text{ha } n = 1, \end{cases}$

$$1 \cdot \varepsilon \cdot \ldots \cdot \varepsilon^{n-1} = \begin{cases} 1, & \text{ha } 2 \nmid n, \\ -1, & \text{ha } 2 \mid n. \end{cases}$$

Az algebra alaptétele

T **Algebra alaptétele**

Minden komplex-együtthatós n-edfokú ($n \geq 1$) polinomnak van komplex gyöke.

T **Algebra alaptétele – változat**

$\mathbb{C}$ algebrailag zárt test.

T

Algebra alaptétele – változat

Minden komplex-együtthatós n-edfokú ($n \geq 1$) polinomnak – a gyököket multiplicitással számolva – pontosan n gyöke van. Azaz minden komplex-együtthatós polinom lineáris tényezők szorzatára bontható: az

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$$

egyenlethez léteznek olyan $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ számok, hogy

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n),$$

és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Á **Állítás**

Minden $a, b, c \in \mathbb{C}$ $(a \neq 0)$ esetén az $az^2 + bz + c$ polinom $a(z - z_1)(z - z_2)$ alakra hozható, ahol (a komplex gyökvonás jelével)

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

B $(z - z_1)(z - z_2)$

$$= a\left(z - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$= a\left(z^2 - z\left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right) + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right)$$

$$= a\left(z^2 - z\frac{-2b}{2a} + \frac{4ac}{4a^2}\right) = az^2 + bz + c$$

Binomiális tétel

D **Binomiális együttható**

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0,\, k \leqslant n.$$

- $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k$, $0! = 1$
- A $\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot k}$ képlet értelmezhető valós n esetén is:
- $\binom{\frac{1}{2}}{3} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2\cdot 3} = \dfrac{1}{16}$

Á **A binomiális együttható alaptulajdonságai**

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ és $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$
4. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

B $1,2:\ \checkmark$, 3: $\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k}$

4: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} + \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} = \left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right)\binom{n}{k} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

F Gondoljuk végig kombinatorikai jelentésüket!

Pascal-háromszög:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

T **Binomiális tétel**

Tetszőleges komplex a és b számokra és $n \in \mathbb{N}_0$ természetes számra

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

m Mivel a bizonyítás csak az a és b közti összeadás és szorzás műveleti tulajdonságait használja, ezért a tétel bármely egységelemes kommutatív R gyűrű elemeire igaz. (Pl. $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$)

P $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$

K $(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + + \ldots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$

1B (kombinatorikai leszámlálással)

Számítsuk ki, hogy az $(a+b)(a+b)\dots(a+b)$ szorzatban mi $a^{n-k}b^k$ együtthatója.

Hányféleképp választható ki az n darab $(a+b)$ tényezőből k darab b és $n-k$ darab a?

Összesen $\binom{n}{k}$.

2B (teljes indukció) $n = 0$: $1 = 1$ ✓

$n \to n+1 =: (a+b)^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k\right)(a+b)$

Beszorzás után minden tagban a kitevők összege $n+1$.

$a^{n+1-k}b^k$ kétszer szerepel:

$$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k a + \binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^{k-1}b = \binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$

P $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

P $0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$

P $(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$

P $(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} i - \binom{n}{2} - \binom{n}{3} i + \dots$

Másrészt $(1+i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}\right)$

A két eredmény összehasonlításából:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots = (\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots = (\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}$$