12. Házi feladat (határidő: 2017-12-04)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Legyen $\mathcal{A} := \{(1,0,1),(1,1,1),(1,-1,0)\}$, $\mathcal{B} := \{(1,2,2),(-1,0,1),(1,1,-1)\}$ az $\mathbb{R}^3$ két bázisa.

   (a) Írjuk fel a $\mathbf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ áttérési mátrixot!

   (b) Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = (1,1,-1)$ egy $\mathbf{v}$ vektor koordinátavektora az $\mathcal{A}$ bázisban. Mi lesz $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$?

2. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert LU-felbontás segítségével, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

3. Adjuk meg az alábbi mátrix PLU-felbontását, és számítsuk ki ennek a segítségével a determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Legyen az 5×5-ös $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa 3, az 5×5-ös $\mathbf{C}$ mátrixé $c \neq 0$. Mi lesz a determinánsa a következő mátrixoknak: *a)* $2\mathbf{A}^{-1}$, *b)* $(2\mathbf{A})^{-1}$, *c)* $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}$, *d)* $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$.

5. Számítsuk ki a következő $n \times n$-es determináns értékét! (Ötlet: a második sort vonjuk ki az összes többiből.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

6. Számítsuk ki a

$$\begin{vmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{vmatrix}$$

determináns értékét! Hogyan lehet ezt általánosítani? (Ötlet: adjuk az összes oszlopot az első oszlophoz.)

7. Hogyan változik egy $n \times n$-es A mátrix determinánsa, ha az A mátrixot

   a) tükrözzük a vízszintes középvonalára;

   b) elforgatjuk $+90°$-kal?

8. Igazoljuk, hogy annak az $n \times n$-es determinánsnak az értéke az $n+1$-edik Fibonacci-szám, melynek főátlójában és alatta 1-ek, fölötte -1-ek, egyebütt 0-k állnak, azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = F_{n+1},$$

   ahol $F_1 = F_2 = 1$ és $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

9. Hány inverzió van az alábbi permutációkban?

   a) $1,2,3,4$; *b)* $2,4,3,1$; *c)* $5,4,1,3,2,6$; *d)* $n,(n-1),\dots,1$; *e)* $1,3,\dots(2n-1),2,4,\dots 2n$.

   Írjuk fel az ezekhez tartozó permutáló mátrixokat és determinánsuk értékét!

10. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét három különböző módon is: elemi sorműveletekkel, valamely sor vagy oszlop szerinti kifejtéssel és a belőle kiválasztható nem zérus értékű kígyók segítségével!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11*. Legyen A $n \times n$-es invertálható mátrix. Mely $\mathbf{v}$ vektorokra igaz, hogy az A bármely sorához hozzáadhatjuk $\mathbf{v}$ alkalmas skalárszorosát úgy, hogy a mátrix determinánsa 0-vá váljon?

12*. Legyen A az az $n\times n$-es mátrix $n \geq 7$-re, amelynek az (i,j) indexű eleme az ij szorzat n-nel vett legkisebb pozitív maradéka (tehát 0 helyett n-et írunk). Bizonyítsuk be, hogy A determinánsa 0.