8. Házi feladat (határidő: 2017-11-03)

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 10 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 8 pontot el kell érni! Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Az alábbi mátrixok közül melyek vannak lépcsős, illetve redukált lépcsős alakban? A redukált lépcsőseknél írjuk fel a mátrixhoz tartozó lineáris egyenletrendszer megoldását vektoros alakban is!

(a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ *(b)* $\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

(c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ *(d)* $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

(e) $\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + \ y + \ z &= 4 \\ -x + \ y - \ z &= 2 \\ 2x + \ y + 2z &= 1 \\ 4x + 4y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 7x + 14y - 21z &= 7 \\ x + \ 2y - \ 3z &= 1 \\ 5x + 10y + 15z &= 5 \\ 3x + \ 6y - \ 9z &= 3 \end{aligned}$$

(a) Mit jelent az egyenletrendszer megoldása a sormodellben? *(b)* Mit jelent az oszlopmodellben? *(c)* Ki tudunk-e választani az eredeti egyenletek közül kevesebbet, melyek ugyanezt a megoldást adják? Melyeket?

4. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek: *(a)* 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és egyértelmű a megoldása; *(b)* 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása; *(c)* 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és nincs megoldása; *(d)* 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van és pontosan 5 megoldása van (van-e ilyen valós, illetve véges test feletti egyenletrendszer)?

5. Az a és b paraméterek értékétől függően hány megoldása van a következő mátrixhoz tartozó valós egyenletrendszernek?

$$\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -a & b \\ 1 & 3 & a & 0 \end{array}\right]$$

6. Oldjuk meg az előző feladatot $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött is!

7. Határozzuk meg az $x + 3y + z = 2$ és $x + 2y + 2z = 5$ egyenletű síkok metszetét! Ha a metszet egyenes, adjuk meg az egyenes explicit egyenletét vektorosan és koordinátánként is!

8. Adjuk meg a $2x - y + z = 1$ sík explicit és implicit egyenletét, illetve egyenletrendszerét! Oldjuk meg az egyenletet, mint egy egy egyenletből álló egyenletrendszert, és írjuk fel a megoldást vektorosan!

9. Legyen $\mathbf{a} = (1, 0, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 2, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$. Lássuk be, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan függetlenek. A $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 0)$ és $\mathbf{w} = (1, 1, 1, 1)$ vektorok közül azt amelyiket lehet, állítsuk elő az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként!

10. Milyen n-re függetlenek a $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, \dots, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, \dots, 0, 0)$, …, $\mathbf{v}_{n-1} = (0, 0, \dots, 1, 1)$, $\mathbf{v}_n = (1, 0, \dots, 0, 1)$ vektorok K^n-ben, ha $K = \mathbb{R}$, illetve ha $K = \mathbb{Z}_2$? Amikor összefüggők, akkor adjuk is meg egy nemtriviális lineáris kombinációjukat, aminek eredménye a $\mathbf{0}$ vektor!

*11. Bizonyítsuk be, hogy ha az $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ különböző egészekre és $y_0, \dots, y_n$ egészekre a legföljebb n-edfokú interpoláló polinom nem egész együtthatós, akkor magasabb fokú $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sem létezik, amelyre $f(x_i) = y_i \ \forall i = 0, \dots, n$.

*12. Milyen p prímekre igaz, hogy ha $x_1, x_2, \dots, x_7 \in \mathbb{Z}_p$, és közülük bármely hatnak az összege 0, akkor mindegyik 0?