7. Házi feladat (határidő: 2017-10-27)

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 10 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 8 pontot el kell érni! Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Hány irreducibilis tényező szorzatára bomlik az $f(x) = -6x^3 + 6x^2 - 12$ polinom $\mathbb{Q}[x]$-ben, $\mathbb{Z}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben, illetve $\mathbb{C}[x]$-ben?

2. Határozzuk meg az $f(x) = -6x^3 + 6x^2 - 12$ és a $g(x) = 3x^2 - 3x - 6$ polinomok legnagyobb (azaz kitüntetett) közös osztóját $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{Z}[x]$-ben!

3. *(a)* Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, és $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor $a - b \mid f(a) - f(b)$.

   (b) Keressünk olyan egész együtthatós polinomot, amelyre $\{f(-2), f(1), f(3)\} = \{2, 6, 11\}$ (nem feltétlenül ebben a sorrendben)!

4. Bizonyítsuk be, hogy az egész együtthatós $p(x)$ polinomnak nincs egész gyöke, ha $p(0)$ és $p(1)$ páratlan szám!

5. Legyen a, b, c az $x^3 - x^2 + 3x + 6$ polinom három gyöke $\mathbb{C}$-ben. Határozzuk meg a következő kifejezések értékét:

   (a) $a + b + c$

   (b) abc

   (c) $a^2 + b^2 + c^2$

6. Legyenek a, b, c az $x^3 - 2x^2 + 4x + 6$ polinom gyökei $\mathbb{C}$-ben. Adjunk meg egy harmadfokú polinomot, amelynek gyökei $a + b$, $a + c$ és $b + c$. (Ne számítsuk ki a gyököket, használjuk a gyökök és együtthatók közti összefüggéseket!)

7. Fejezzük ki az $x^3 + y^3 + z^3$ polinomot x, y, z elemi szimmetrikus polinomjainak polinomjaként!

8. Számítsuk ki a $\Phi_8(x)$ és $\Phi_{10}(x)$ körosztási polinomokat, és bizonyítsuk be, hogy irreducibilisek $\mathbb{Q}[x]$-ben!

9. Adjuk meg azt a legalacsonyabbfokú $p(x)$ polinomot, amelyre $k = 1, 2, 3, 4$ esetén $p(x_k) = y_k$:

x_k	-1	0	1	2
y_k	-10	-5	0	5

10. Tudjuk, hogy ha p prím, akkor minden

$$f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$$

függvényhez van olyan legföljebb $p - 1$-edfokú

$$q \in \mathbb{Z}_p[x]$$

polinom, hogy minden $a \in \mathbb{Z}_p$-re $f(a) = q(a)$. Keressük meg azt a $q \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomot, melyre

a	0	1	2	3	4
$q(a)$	2	3	0	0	0

*11. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan legalább elsőfokú egész együtthatós polinom, amelynek az értéke minden egész helyen prímszám.

*12. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

komplex együtthatós polinom, akkor gyökeinek abszolút értéke legfeljebb

$$1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|.$$