6. Házi feladat (határidő: 2017-10-20)

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 10 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 8 pontot el kell érni! Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Bontsuk fel az $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben!

2. Irreducibilis-e az $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 3$ polinom $\mathbb{R}$ fölött, $\mathbb{Q}$ fölött és $\mathbb{Z}_2$ fölött?

3. Adjuk meg azt a legalacsonyabbfokú egyfőegyütthatós

   (a) komplex együtthatós

   (b) valós együtthatós polinomot,

   melynek i kétszeres, 1 háromszoros gyöke!

4. Határozzuk meg az $x^3 - x^2 - 8x + 12$ polinom gyökeit a racionális gyökteszt segítségével!

5. Keressük meg az $2x^6 - x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x + 5$ polinom összes gyökét! Bontsuk fel e polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben!

6. Bontsuk fel a

   $$2x^6 - x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x + 5$$

   polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben!

7. *(a)* Mutassunk 3-adfokú $\mathbb{Z}[x]$-beli polinomot, amelynek nincs $\mathbb{Z}$-ben gyöke, de nem irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben.

   (b) Mutassunk $\mathbb{R}[x]$-beli negyedfokú polinomot, amelynek nincs $\mathbb{R}$-ben gyöke, de nem irreducibilis $\mathbb{R}[x]$-ben.

8. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x^3 + 2x + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben, de semelyik $a \in \mathbb{Z}$ számmal nem teljesíti az $f(x + a)$ polinom a Schönemann–Eisenstein-kritériumot!

9. Határozzuk meg az $x^3 + 6x^2 + 6x - 13$ polinom gyökeit a Cardano-képlet segítségével!

10. Határozzuk meg azokat a $c \in \mathbb{Z}$ számokat, amelyekre az $x^3 + 2x^2 + cx + 4$ polinomnak van racionális gyöke!

*11. Határozzuk meg azokat a $c \in \mathbb{Z}$ számokat, amelyekre az $x^3 + 3x^2 + cx + c$ polinomnak van racionális gyöke!

*12. Egy komplex szám algebrai, ha gyöke egy $\mathbb{Z}[x]$-beli nem nulla polinomnak, és algebrai egész, ha gyöke egy $\mathbb{Z}[x]$-beli 1 főegyütthatós polinomnak. Bizonyítsuk be, hogy ha α algebrai, akkor van olyan $m \in \mathbb{N}^+$, amelyre $m\alpha$ algebrai egész.