5. Házi feladat (határidő: 2017-10-13)

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 10 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 8 pontot el kell érni! Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2x^2 + 4$ polinomot *(a)* $x+1$-gyel *(b)* $(x+1)^2$-nel *(c)* (x^2-1)-gyel!

2. A Horner-séma alkalmazásával *(a)* osszuk el maradékosan a $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ polinomot a $q(x) = x + 1$ polinommal, és *(b)* írjuk fel $p(x)$-et $x+1$ polinomjaként (azaz $x+1$ hatványaival)!

3. Mit ad maradékul a $3x^{21} - 2x^{14} + 5x^9 - 7$ polinom $(x-i)$-vel, $(x+i)$-vel, x^2+1-gyel illetve $(x-1)^3$-nel osztva?

4. Milyen feltételek mellett osztható az $x^3 + px + q$ polinom az $x^2 + rx - 1$ polinommal?

5. Határozzuk meg a $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 2$ és $q(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ polinomok *(a)* legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmussal és *(b)* kibővített euklideszi algoritmussal adjunk meg olyan $\alpha(x)$ és $\beta(x)$ polinomot, hogy $\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x) = (p(x), q(x))$ legyen.

6. Határozzuk meg az összes irreducibilis másod- és harmadfokú polinomot GF(2) felett! Irreducibilisek-e ezek $\mathbb{Z}$ felett is?

7. Irreducibilis-e az $x^3 + 3x + 1$ polinom $\mathbb{Q}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben, illetve $\mathbb{Z}_5[x]$-ben?

8. Adjuk meg az alábbi polinomok gyöktényezős alakját! *(a)* $x^n - 1$ *(b)* $x^{2n} - x^{2n-1} + ... + x^2 - x + 1$

9. Határozzuk meg $x^n - 1$ és $x^k - 1$ közös gyökeit! Mutassuk meg, hogy az ezekhez tartozó gyöktényezők szorzata $x^d - 1$, ahol $d = (n, k)$!

10. Határozzuk meg az a együtthatót úgy, hogy -1 legalább kétszeres gyöke legyen az

$$x^5 - ax^2 - ax + 1$$

polinomnak!

*11 Igazoljuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

*12 Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges legalább másodfokú komplex $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomhoz van olyan $c \in \mathbb{C}$ szám, hogy $f(x) + c$-nek többszörös gyöke legyen $\mathbb{C}$-ben. Igaz-e ez $f(x) \in \mathbb{R}[x]$-re $c \in \mathbb{R}$-rel?