

4. Házi feladat (határidő: 2017-10-06)

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 10 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 8 pontot el kell érni! Más megoldását lemasolni nem szabad!

1. Határozzuk meg az

$$\frac{(1 + 2017i)^{2017}}{(1 - 2017i)^{2017}}$$

komplex szám abszolút értékét!

2. A $-\sqrt{3} + i$ és az $1 - i \operatorname{tg} \alpha$ komplex számokat hozzuk trigonometrikus alakra!
3. Adjuk meg *a*) a primitív 5-ödik *b*) a primitív 8-adik egységgyökök összegét és szorzatát!
4. Mennyi a z és u komplex számok által bezárt szög, ha $zu = \sqrt{3} + i$ és $zu^2 = i$?
5. Számítsuk ki a $-243i$ összes ötödik gyökét trigonometrikus alakban!
6. Oldjuk meg az $z^6 - z^3 + 1 - i = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán!
7. Számítsuk ki a $\bar{z} = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) egyenlet összes megoldását!

8. Legyen $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ az n -edik egységgyökök halmaza egy adott $n \geq 1$ egészre. Számítsuk ki a

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^k,$$

összeget, ahol $k \in \mathbb{N}_0$.

9. Igazoljuk, hogy tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}^+$ egészekre

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \dots + \binom{k+n}{n} = \binom{k+n+1}{k+1}.$$

10. Ellenőrizzük, hogy a rendezett valós számpárokra a komplex szorzásnak megfelelő

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

művelet valóban asszociatív.

- *11 Adott $m \in \mathbb{N}^+$ -ra határozzuk meg az összes olyan b egész számot, amelyre

$$\{t_1 + b, t_2 + b, \dots, t_{\varphi(m)} + b\}$$

redukált maradék rendszer modulo m , ha $\{t_1, t_2, \dots, t_{\varphi(m)}\}$ redukált maradékrendszer modulo m !

- *12 Legyen ε egy primitív n -edik egységgyök. Számítsuk ki az $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots + n\varepsilon^{n-1}$ összeget.